UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica III — Scritto del 8/7/06 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Esprimere come multiplo di un integrale semplice definito l'area della superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ \sqrt{y^2 + z^2} = 1 - (x-2)^2\}$.

2. Trovare il massimo della funzione $x + z$ sull'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = 1, \ z = y^2\}$.

3. Una 1-forma chiusa definita sull'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 > \mathrm{e}^{-y^2}\}$
è necessariamente anche esatta? Spiegare.

4. L'insieme delle soluzioni dell'equazione alle differenze $a_{n+3} = n^3 \cdot a_{n+2} - \cos(n\pi) \cdot a_{n+1} + 7 \cdot a_n$
è uno spazio vettoriale? Spiegare.

5. Calcolare $\int_\Sigma ((x+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z)$ dove $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 1 - (x-1)^2 - (y-1)^2, \ z \geqslant 0\}$.

6. Siano $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ e $S_N(f)(t) = \sum_{n=-N}^{N} \alpha_n(f)\,\mathrm{e}^{int}$, dove $(\alpha_n(f))_{n=-\infty}^{\infty}$ sono i coefficienti di Fourier complessi di f. Dati $\beta_n \in \mathbb{C}$ per $n = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ e posto $g(t) = \sum_{n=-3}^{3} \beta_n\,\mathrm{e}^{int}$, per quali $N \geqslant 0$ può accadere che $\int_{-\pi}^{\pi} |f - g|^2 < \int_{-\pi}^{\pi} |f - S_N(f)|^2$?

7. Sia $f(x) = 1 - x$ per $x \in [0, 1]$ e $f(x) = 0$ per $x \notin [0, 1]$.
Calcolare la trasformata di Fourier di f.

1. ♠ 2. ♢ 3. ♣ 4. ♠ 5. ♡ 6. ♣ 7. ♢ 8. ♠ 9. ♡ 10. ♡

Matematica III — Scritto del 8/7/06 — Esercizî

1. Sia V lo spazio delle funzioni definite su $(0,\infty)$ che risolvono l'equazione differenziale.

$$y''(t) + \frac{t-3}{t} y'(t) + \frac{3}{t^2} y(t) = 0.$$

Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $y_a : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $y_a(t) = t^3 e^{at}$.

(A) (3 punti) Si mostri che $y_a \in V$ se e solo se $a = -1$.

(B) (6 punti) Si determini una base di V (lasciando eventualmente indicati un integrale definito).

(C) (3 punti) Si mostri che per ogni $y \in V$ si ha $\lim\limits_{t\to 0^+} y(t) = 0$.

2. Per a reale con $0 < a < 1$ sia f_a la funzione meromorfa definita da $f_a(z) = \frac{\mathrm{e}^{az}}{1+\mathrm{e}^z}$. Per ogni $R > 0$, siano inoltre $\gamma_1^R, \gamma_3^R : [-R, R] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2^R, \gamma_4^R : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ i cammini definiti da

$$\gamma_1^R(t) = t, \quad \gamma_2^R(t) = R + it, \quad \gamma_3^R(t) = -t + 2\pi i, \quad \gamma_4^R(t) = -R + i(2\pi - t).$$

(A) (2 punti) Si determinino i poli di f_a contenuti nella striscia $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \Im(z) < 2\pi\}$, e se ne calcolino i relativi residui.

(B) (3 punti) Si dimostri l'uguaglianza $\mathrm{e}^{\pi a i}/(1 - \mathrm{e}^{2\pi a i}) = i/(2\sin \pi a)$.

(C) (2 punti) Si mostri che $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2^R} f_a(z)\mathrm{d}z = \lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{\gamma_4^R} f_a(z)\mathrm{d}z = 0$.

(D) (2 punti) Si mostri che

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\gamma_1^R} f_a(z)\mathrm{d}z + \lim_{R\to\infty} \int\limits_{\gamma_3^R} f_a(z)\mathrm{d}z = (1 - \mathrm{e}^{2\pi a i}) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{at}}{1 + \mathrm{e}^t} \mathrm{d}t.$$

(E) (3 punti) Sia $-1 < b < 0$. Si calcoli $\int\limits_0^\infty \frac{t^b}{1+t}\mathrm{d}t$ (si effettui un opportuno cambio di variabile).

Risposte esatte

3. ♣

1. $2\pi \int_1^3 (1-(x-2)^2)\sqrt{4x^2-16x+17}\,\mathrm{d}x$.

2. $5/4$.

3. Sì: l'insieme ha due componenti connesse, entrambe semplicemente connesse.

4. Sì, l'equazione è lineare.

5. $\pm\pi$.

6. Solo per $N = 0, 1, 2, 3$.

7. $\mathcal{F}(f)(t) = (1 - it - \mathrm{e}^{-it})/t^2$.

1. ♠ 2. ♢ 3. ♣ 4. ♠ 5. ♡ 6. ♣ 7. ♢ 8. ♠ 9. ♡ 10. ♡