UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica III — Scritto del 8/7/06 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Una 1-forma chiusa definita sull'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 > \mathrm{e}^{-y^2}\}$
è necessariamente anche esatta? Spiegare.

2. Calcolare $\int\limits_{\Sigma} (z \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + (y-x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z)$ dove $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x = 1-(y-1)^2-(z-1)^2, \ x \geqslant 0\}$.

3. Trovare il minimo della funzione $y+z$ sull'insieme $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2 = 1, \ z = x^2\}$.

4. Esprimere come multiplo di un integrale semplice definito l'area della superficie
$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ \sqrt{y^2+z^2} = 1-(x-2)^2\}$.

5. L'insieme delle soluzioni dell'equazione alle differenze $a_{n+3} = \mathrm{e}^{2n} \cdot a_{n+2} + n^2 \cdot a_{n+1} - 5 \cdot a_n$
è uno spazio vettoriale? Spiegare.

6. Siano $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ e $S_N(f)(t) = \sum\limits_{n=-N}^{N} \alpha_n(f)\,\mathrm{e}^{int}$, dove $(\alpha_n(f))_{n=-\infty}^{\infty}$ sono i coefficienti di Fourier complessi di f. Dati $\beta_n \in \mathbb{C}$ per $n = -4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4$ e posto $g(t) = \sum\limits_{n=-3}^{3} \beta_n\,\mathrm{e}^{int}$, per quali $N \geqslant 0$ può accadere che $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f-g|^2 < \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f-S_N(f)|^2$?

7. Sia $f(x) = 1+x$ per $x \in [-1,0]$ e $f(x) = 0$ per $x \notin [-1,0]$.
Calcolare la trasformata di Fourier di f.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica III — Scritto del 8/7/06 — Eserciziî

1. Sia V lo spazio delle funzioni definite su $(0, \infty)$ che risolvono l'equazione differenziale.

$$y''(t) + \frac{t-3}{t} y'(t) + \frac{3}{t^2} y(t) = 0.$$

Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $y_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $y_a(t) = t^3 e^{at}$.

(A) (3 punti) Si mostri che $y_a \in V$ se e solo se $a = -1$.

(B) (6 punti) Si determini una base di V (lasciando eventualmente indicati un integrale definito).

(C) (3 punti) Si mostri che per ogni $y \in V$ si ha $\lim_{t \to 0^+} y(t) = 0$.

2. Per a reale con $0 < a < 1$ sia f_a la funzione meromorfa definita da $f_a(z) = \frac{e^{az}}{1+e^z}$. Per ogni $R > 0$, siano inoltre $\gamma_1^R, \gamma_3^R : [-R, R] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2^R, \gamma_4^R : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ i cammini definiti da

$$\gamma_1^R(t) = t, \quad \gamma_2^R(t) = R + it, \quad \gamma_3^R(t) = -t + 2\pi i, \quad \gamma_4^R(t) = -R + i(2\pi - t).$$

(A) (2 punti) Si determinino i poli di f_a contenuti nella striscia $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \Im(z) < 2\pi\}$, e se ne calcolino i relativi residui.

(B) (3 punti) Si dimostri l'uguaglianza $e^{\pi a i}/(1 - e^{2\pi a i}) = i/(2 \sin \pi a)$.

(C) (2 punti) Si mostri che $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2^R} f_a(z) dz = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_4^R} f_a(z) dz = 0$.

(D) (2 punti) Si mostri che

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_1^R} f_a(z) dz + \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_3^R} f_a(z) dz = (1 - e^{2\pi a i}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{at}}{1 + e^t} dt.$$

(E) (3 punti) Sia $-1 < b < 0$. Si calcoli $\int_0^\infty \frac{t^b}{1+t} dt$ (si effettui un opportuno cambio di variabile).

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica III — Scritto del 8/7/06 — Quesiti

Risposte esatte

5. ♡

1. Sì: l'insieme ha due componenti connesse, entrambe semplicemente connesse.

2. $\pm\pi$.

3. -1.

4. $2\pi \int_1^3 (1-(x-2)^2)\sqrt{4x^2-16x+17}\,\mathrm{d}x$.

5. Sì, l'equazione è lineare.

6. Solo per $N = 0, 1, 2, 3$.

7. $\mathcal{F}(f)(t) = (\,\mathrm{e}^{it} - 1 - it)/t^2$.

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡