



 Matematica III — Scritto del 8/7/06 — Quesiti

Nome _____ Cognome _____ Matricola _____

1. Una 1-forma chiusa definita sull'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x^4 + y^2 - 4| > 1\}$ è necessariamente anche esatta? Spiegare.

2. Calcolare $\int_{\Sigma} ((x+z) dx dy + y dx dz)$ dove $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - (x-1)^2 - (y-1)^2, z \geq 0\}$.

3. Trovare il massimo della funzione $x + z$ sull'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = y^2\}$.

4. Esprimere come multiplo di un integrale semplice definito l'area della superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + z^2} = 1 - (y-2)^2\}$.

5. L'insieme delle soluzioni dell'equazione alle differenze $a_{n+3} = n^3 \cdot a_{n+2} - \cos(n\pi) \cdot a_{n+1} + 7 \cdot a_n$ è uno spazio vettoriale? Spiegare.

6. Siano $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ e $S_N(f)(t) = \sum_{n=-N}^N \alpha_n(f) e^{int}$, dove $(\alpha_n(f))_{n=-\infty}^{\infty}$ sono i coefficienti di Fourier complessi di f . Dati $\lambda_n \in \mathbb{C}$ per $n = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ e posto $\varphi(t) = \sum_{n=-3}^3 \lambda_n e^{int}$, per quali $N \geq 0$ può accadere che $\int_{-\pi}^{\pi} |f - \varphi|^2 < \int_{-\pi}^{\pi} |f - S_N(f)|^2$?

7. Sia $f(x) = 1 - x$ per $x \in [0, 1]$ e $f(x) = 0$ per $x \notin [0, 1]$. Calcolare la trasformata di Fourier di f .

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

 1. ♥ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♦ 5. ◇ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♦ 9. ♣ 10. ♥



1. Sia V lo spazio delle funzioni definite su $(0, \infty)$ che risolvono l'equazione differenziale.

$$y''(t) + \frac{t-3}{t}y'(t) + \frac{3}{t^2}y(t) = 0.$$

Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $y_a : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $y_a(t) = t^3 e^{at}$.

(A) (3 punti) Si mostri che $y_a \in V$ se e solo se $a = -1$.

(B) (6 punti) Si determini una base di V (lasciando eventualmente indicati un integrale definito).

(C) (3 punti) Si mostri che per ogni $y \in V$ si ha $\lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = 0$.

2. Per a reale con $0 < a < 1$ sia f_a la funzione meromorfa definita da $f_a(z) = \frac{e^{az}}{1+e^z}$. Per ogni $R > 0$, siano inoltre $\gamma_1^R, \gamma_3^R : [-R, R] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_2^R, \gamma_4^R : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ i cammini definiti da

$$\gamma_1^R(t) = t, \quad \gamma_2^R(t) = R + it, \quad \gamma_3^R(t) = -t + 2\pi i, \quad \gamma_4^R(t) = -R + i(2\pi - t).$$

(A) (2 punti) Si determinino i poli di f_a contenuti nella striscia $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \Im(z) < 2\pi\}$, e se ne calcolino i relativi residui.

(B) (3 punti) Si dimostri l'uguaglianza $e^{\pi ai} / (1 - e^{2\pi ai}) = i / (2 \sin \pi a)$.

(C) (2 punti) Si mostri che $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_2^R} f_a(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_4^R} f_a(z) dz = 0$.

(D) (2 punti) Si mostri che

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_1^R} f_a(z) dz + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_3^R} f_a(z) dz = (1 - e^{2\pi ai}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{at}}{1+e^t} dt.$$

(E) (3 punti) Sia $-1 < b < 0$. Si calcoli $\int_0^\infty \frac{t^b}{1+t} dt$ (si effettui un opportuno cambio di variabile).



Risposte esatte

5. $\diamond$

1. No: l'insieme ha due componenti connesse, una delle quali non è semplicemente connessa.

2. $\pm\pi$.

3. $5/4$.

4. $2\pi \int_1^3 (1 - (y-2)^2) \sqrt{4y^2 - 16y + 17} \, dy$.

5. Sì, l'equazione è lineare.

6. Solo per $N = 0, 1, 2$.

7. $\mathcal{F}(f)(t) = (1 - it - e^{-it})/t^2$.

1. $\heartsuit$ 2. $\clubsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\diamondsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\spadesuit$ 8. $\diamondsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\heartsuit$