UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica III — Scritto del 07/02/06 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Calcolare $\displaystyle\int_{\partial[-\pi/2,\pi/2]^2} \Big(\Big(\big(\,\mathrm{e}^{\cos(1+x^5)} + \sin(y)\Big)\ \mathrm{d}x + \big(\log(1+y^2)+x^4\big)\ \mathrm{d}y\Big).$

2. Siano $\Sigma = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ x+y^2+z^2 = 1,\ x\geqslant 0\}$ e $v(x,y,z) = (z^2-x/(2+z), \sin(x^3z^2), \log(2+z))$. Calcolare $\int_\Sigma \langle v|n\rangle$ dove n è un campo unitario normale a Σ.

3. Trovare il massimo della funzione xy^2 sull'ellisse di semiassi 2 e 3.

4. Assegnando arbitrariamente $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$, quante distinte successioni $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty}$ a valori complessi al massimo possono esistere tali che $\alpha_{n+3} = \alpha_n^2 + 2\alpha_{n+1}\cdot\alpha_{n+2}$?

5. Sia $\Sigma = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ x^2-y^2+z^2 = -1,\ 0\leqslant y\leqslant\sqrt{2}\}$. Esprimere l'area di Σ come integrale semplice definito.

6. Se $f = \chi_{[-\pi,0]}$, quanto fa $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n\alpha_n(f)$?

7. Sia $f(x) = \mathrm{e}^x$ per $x\geqslant 0$. Calcolare la trasformata di Laplace $\mathcal{L}(f)$.

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡

Matematica III — Scritto del 07/02/06 — Esercizî

1. Per ogni $b \in \mathbb{R}$ si consideri il problema di Cauchy $\begin{cases} x'(t) + \frac{x(t)}{t} + \frac{2\,\mathrm{e}^{-tx(t)}}{t(1+t^2)} = 0 \\ x(1) = b \end{cases}$ e se ne indichi con x_b la soluzione massimale, definita su un intervallo contenuto in $(0, \infty)$.

(A) (3 punti) Si trovi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $h(t) = \mathrm{e}^{tx_b(t)} + g(t)$ sia costante per ogni b.

(B) (2 punti) Si dimostri che per ogni b esiste ϵ tale che x_b sia definita su $(0, 1+\epsilon)$.

(C) (2 punti) Si calcoli $\lim\limits_{t\to 0^+} x_b(t)$.

(D) (2 punti) Si determinino i valori di b per cui x_b sia definita su $(0, +\infty)$.

(E) (3 punti) Si determinino i valori di a per cui esista una soluzione locale del problema

$$\begin{cases} t(1+t^2)x'(t) + (1+t^2)x(t) + 2\,\mathrm{e}^{-tx(t)} = 0 \\ x(0) = a. \end{cases}$$

2. Siano $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$ e $g : \Omega \to \mathbb{C}$ data da $g(\rho\,\mathrm{e}^{i\theta}) = \log\rho + i\theta$ per $\rho > 0$ e $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$.

(A) (3 punti) Si trovino $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tali che se $x + iy \in \Omega$ si abbia $g(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, si provi che u, v verificano le equazioni di Cauchy-Riemann e se ne deduca che g è olomorfa.

Siano $a > 0$ e $f : \Omega \to \widehat{\mathbb{C}}$ la funzione meromorfa data da $f(z) = (zg(z))/(z^4 - a^4)$. Per ogni $R > 0$ siano $\gamma_1^R, \gamma_3^R : [1/R, R] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2^R, \gamma_4^R : [-\pi/4, \pi/4] \to \mathbb{C}$, i cammini così definiti:

$$\gamma_1^R(t) = t\,\mathrm{e}^{-i\pi/4}, \quad \gamma_2^R(t) = R\,\mathrm{e}^{it}, \quad \gamma_3^R(t) = t\,\mathrm{e}^{i\pi/4}, \quad \gamma_4^R(t) = \mathrm{e}^{it}/R.$$

(B) (2 punti) Si determinino i poli di f con i relativi ordini e residui.

(C) (3 punti) Si mostri che $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{\gamma_2^R} f(z)\,\mathrm{d}z = \lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{\gamma_4^R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

(D) (2 punti) Si provi che $\int\limits_{\gamma_1^R} f(z)\,\mathrm{d}z - \int\limits_{\gamma_3^R} f(z)\,\mathrm{d}z = 2i \int\limits_{1/R}^{R} \frac{t\log t}{a^4+t^4}\,\mathrm{d}t$.

(E) (1 punto) Si calcoli $\int\limits_0^\infty \frac{t\log t}{a^4+t^4}\,\mathrm{d}t$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Risposte esatte

5. ♡

1. -2π

2. $\pm\pi/4$

3. $4\sqrt{3}$

4. Quattro: α_1 e α_0 si ottengono estraendo radici quadrate, e per valori generici di $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ gli argomenti delle radici sono non nulli

5. $2\pi \int_0^1 \rho \sqrt{\frac{1+2\rho^2}{1+\rho^2}}\, \mathrm{d}\rho$

6. $1/2$

7. $F(z) = 1/(z-1)$ per $\Re(z) > 1$

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡