UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica III — Scritto del 07/02/06 — Quesiti

Nome ______________ **Cognome** ______________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Calcolare $\int\limits_{\partial[-1,1]^2} \left(\left(\left(\mathrm{e}^{\sin(1+x^3)} + \cos(y)\right) \mathrm{d}x + (\log(1+y^4)+x)\ \mathrm{d}y\right)\right.$.

2. Siano $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y+z^2 = 1,\ y \geqslant 0\}$ e $v(x,y,z) = (\cos(y^2z^3), x^2 + y\sin(z), \cos(z))$. Calcolare $\int\limits_{\Sigma} \langle v|n\rangle$ dove n è un campo unitario normale a Σ.

3. Trovare il massimo della funzione x^2y sull'ellisse di semiassi 3 e 2.

4. Assegnando arbitrariamente a_2, a_3, a_4, quante distinte successioni $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ a valori complessi al massimo possono esistere tali che $a_{n+3} = a_n^3 + a_{n+1} \cdot a_{n+2}$?

5. Sia $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2-z^2 = -1,\ 0 \leqslant z \leqslant \sqrt{5}\}$. Esprimere l'area di Σ come integrale semplice definito.

6. Se $f = -\chi_{[0,\pi]}$, quanto fa $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \alpha_n(f)$?

7. Sia $f(x) = x$ per $x \geqslant 0$. Calcolare la trasformata di Laplace $\mathcal{L}(f)$.

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡

Matematica III — Scritto del 07/02/06 — Esercizî

1. Per ogni $b \in \mathbb{R}$ si consideri il problema di Cauchy $\begin{cases} x'(t) + \frac{x(t)}{t} + \frac{2\,\mathrm{e}^{-tx(t)}}{t(1+t^2)} = 0 \\ x(1) = b \end{cases}$ e se ne indichi con x_b la soluzione massimale, definita su un intervallo contenuto in $(0, \infty)$.

(A) (3 punti) Si trovi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $h(t) = \mathrm{e}^{tx_b(t)} + g(t)$ sia costante per ogni b.

(B) (2 punti) Si dimostri che per ogni b esiste ϵ tale che x_b sia definita su $(0, 1+\epsilon)$.

(C) (2 punti) Si calcoli $\lim\limits_{t \to 0^+} x_b(t)$.

(D) (2 punti) Si determinino i valori di b per cui x_b sia definita su $(0, +\infty)$.

(E) (3 punti) Si determinino i valori di a per cui esista una soluzione locale del problema

$$\begin{cases} t(1+t^2)x'(t) + (1+t^2)x(t) + 2\,\mathrm{e}^{-tx(t)} = 0 \\ x(0) = a. \end{cases}$$

2. Siano $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$ e $g : \Omega \to \mathbb{C}$ data da $g(\rho\,\mathrm{e}^{i\theta}) = \log \rho + i\theta$ per $\rho > 0$ e $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$.

(A) (3 punti) Si trovino $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tali che se $x + iy \in \Omega$ si abbia $g(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, si provi che u, v verificano le equazioni di Cauchy-Riemann e se ne deduca che g è olomorfa.

Siano $a > 0$ e $f : \Omega \to \widehat{\mathbb{C}}$ la funzione meromorfa data da $f(z) = (zg(z))/(z^4 - a^4)$. Per ogni $R > 0$ siano $\gamma_1^R, \gamma_3^R : [1/R, R] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2^R, \gamma_4^R : [-\pi/4, \pi/4] \to \mathbb{C}$, i cammini così definiti:

$$\gamma_1^R(t) = t\,\mathrm{e}^{-i\pi/4}, \quad \gamma_2^R(t) = R\,\mathrm{e}^{it}, \quad \gamma_3^R(t) = t\,\mathrm{e}^{i\pi/4}, \quad \gamma_4^R(t) = \mathrm{e}^{it}/R.$$

(B) (2 punti) Si determinino i poli di f con i relativi ordini e residui.

(C) (3 punti) Si mostri che $\lim\limits_{R \to \infty} \int_{\gamma_2^R} f(z)\,\mathrm{d}z = \lim\limits_{R \to \infty} \int_{\gamma_4^R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

(D) (2 punti) Si provi che $\int_{\gamma_1^R} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_3^R} f(z)\,\mathrm{d}z = 2i \int_{1/R}^{R} \frac{t \log t}{a^4 + t^4}\,\mathrm{d}t$.

(E) (1 punto) Si calcoli $\int_0^\infty \frac{t \log t}{a^4 + t^4}\,\mathrm{d}t$.

Risposte esatte

5. $\diamondsuit$

1. 4

2. $\pm\pi/4$

3. $4\sqrt{3}$

4. Nove: a_1 e a_0 si ottengono estraendo radici cubiche, e per valori generici di a_2, a_3, a_4 gli argomenti delle radici sono non nulli

5. $2\pi \int_0^2 \rho\sqrt{\frac{1+2\rho^2}{1+\rho^2}}\,\mathrm{d}\rho$

6. $-1/2$

7. $F(z) = 1/z^2$ per $\Re(z) > 0$

1. $\heartsuit$ 2. $\clubsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\diamondsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\spadesuit$ 8. $\diamondsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\heartsuit$