UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 27/5/06 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Calcolare $\det\begin{pmatrix} 1-i & 1 & i \\ 2-i & -3 & 2i \\ 1+2i & i & -1 \end{pmatrix}$.

2. Trovare una base che diagonalizzi la matrice $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$.

3. Trovare $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ unitario, ortogonale a $(1-3i, 2+i)$ e con z_2 reale positivo.

4. Se $X = \{x \in \mathbb{R}^6 : \ x_1 - x_3 + x_4 + x_5 = x_2 - x_3 + x_4 - x_6 = x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 0\}$,
che dimensione può avere Y tale che $X + Y = \mathbb{R}^6$?

5. È sempre possibile estrarre una base da un sistema di 4 vettori distinti di $\mathbb{C}^3$? Spiegare perché.

6. Sia $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ data da $f(z_1, z_2) = (z_1 + iz_2, -iz_1)$. Trovare $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ dove $\mathcal{B} = ((2, i), (i, 1))$.

7. Esibire un sistema lineare non omogeneo di 3 equazioni distinte in 4 incognite privo di soluzioni.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♠ 3. ♣ 4. ♢ 5. ♣ 6. ♡ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♠ 10. ♣

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 27/5/06 — Esercizî

1. Al variare di k in $\mathbb{R}$ si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 2k & 0 & 1 \\ k & k & 1 \\ 0 & 2k & 1 \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Si dimostri che $\det A_k = 0$ per ogni k.

(B) (4 punti) Si calcoli il polinomio caratteristico di A_k.

(C) (3 punti) Si calcolino gli autovalori di A_k.

(D) (3 punti) Si determinino i valori di k per cui la matrice A_k è diagonalizzabile.

2. Si consideri al variare di k in $\mathbb{C}$ il seguente sottospazio affine di $\mathbb{C}^3$:

$$V_k = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : \; iz_1 - iz_2 - z_3 = -1, \; -kz_1 + (1+k)z_2 = -ik\}.$$

(A) (3 punti) Si trovi un'equazione parametrica di V_k.

(B) (3 punti) Si provi che V_k è sempre contenuto nel sottospazio

$$E = (i, 1, -i) + \mathrm{Span}((1,1,0), (1,0,i)).$$

(C) (3 punti) Si determini un valore k_0 tale che V_{k_0} risulti parallelo al sottospazio

$$W = (1,1,0) + \mathrm{Span}((2,1,i)).$$

(D) (3 punti) Si determini un vettore unitario di $\mathbb{C}^3$ ortogonale al sottospazio vettoriale associato a $V_{k_0} + W$.

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 27/5/06 — Quesiti

Risposte esatte

2. ♠

1. -5.

2. $(2, 1)$, $(1, 3)$.

3. $(1 + 7i, 10)/\sqrt{150}$.

4. X ha dimensione 4, dunque tra 2 e 6.

5. No, possono non essere linearmente indipendenti.

6. $\begin{pmatrix} -1 & i \\ -5i & 4 \end{pmatrix}/3$.

7. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$.

---

1. ♠ 2. ♠ 3. ♣ 4. ♢ 5. ♣ 6. ♡ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♠ 10. ♣
