UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 27/5/06 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. È sempre possibile estrarre una base da un sistema di 5 vettori distinti di $\mathbb{R}^4$? Spiegare perché.

2. Se $Y = \{y \in \mathbb{R}^5 : \ y_1 - y_3 + y_4 + y_5 = y_2 - y_3 + y_4 = y_1 - y_2 + y_5 = 0\}$,
che dimensione può avere X tale che $X + Y = \mathbb{R}^5$?

3. Esibire un sistema lineare non omogeneo di 3 equazioni distinte in 4 incognite privo di soluzioni.

4. Calcolare $\det \begin{pmatrix} 1-i & 1 & i \\ 2-i & -3 & 2i \\ 1+2i & i & -1 \end{pmatrix}$.

5. Trovare una base che diagonalizzi la matrice $\begin{pmatrix} -7 & 6 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$.

6. Sia $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ data da $f(z_1, z_2) = (z_1 + iz_2, -iz_1)$. Trovare $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ dove $\mathcal{B} = ((2, i), (i, 1))$.

7. Trovare $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ unitario, ortogonale a $(1 - 3i, 2 + i)$ e con z_2 reale positivo.

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 27/5/06 — Esercizî

1. Al variare di k in $\mathbb{R}$ si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 2k & 0 & 1 \\ k & k & 1 \\ 0 & 2k & 1 \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Si dimostri che $\det A_k = 0$ per ogni k.

(B) (4 punti) Si calcoli il polinomio caratteristico di A_k.

(C) (3 punti) Si calcolino gli autovalori di A_k.

(D) (3 punti) Si determinino i valori di k per cui la matrice A_k è diagonalizzabile.

2. Si consideri al variare di k in $\mathbb{C}$ il seguente sottospazio affine di $\mathbb{C}^3$:

$$V_k = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : \; iz_1 - iz_2 - z_3 = -1, \; -kz_1 + (1+k)z_2 = -ik\}.$$

(A) (3 punti) Si trovi un'equazione parametrica di V_k.

(B) (3 punti) Si provi che V_k è sempre contenuto nel sottospazio

$$E = (i, 1, -i) + \mathrm{Span}((1,1,0), (1,0,i)).$$

(C) (3 punti) Si determini un valore k_0 tale che V_{k_0} risulti parallelo al sottospazio

$$W = (1,1,0) + \mathrm{Span}((2,1,i)).$$

(D) (3 punti) Si determini un vettore unitario di $\mathbb{C}^3$ ortogonale al sottospazio vettoriale associato a $V_{k_0} + W$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 27/5/06 — Quesiti

Risposte esatte

5. ♡

1. No, possono non essere linearmente indipendenti.

2. Y ha dimensione 3, dunque tra 2 e 5.

3. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1,\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2.$

4. $-5.$

5. $(2,1),\ (3,4).$

6. $\begin{pmatrix} -1 & i \\ -5i & 4 \end{pmatrix}/3.$

7. $(1+7i, 10)/\sqrt{150}.$

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡