UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 27/5/06 — Quesiti

Nome _____ **Cognome** _____ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. È sempre possibile estrarre una base da un sistema di 4 vettori distinti di $\mathbb{C}^3$? Spiegare perché.

2. Se $X = \{x \in \mathbb{R}^6 : \ x_1 - x_3 + x_4 + x_5 = x_2 - x_3 + x_4 - x_6 = x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 0\}$,
che dimensione può avere Y tale che $X + Y = \mathbb{R}^6$?

3. Esibire un sistema lineare non omogeneo di 3 equazioni distinte in 3 incognite con infinite soluzioni.

4. Calcolare $\det \begin{pmatrix} 1+i & 1 & i \\ 2-i & -1 & 2i \\ 1+2i & i & -2 \end{pmatrix}$.

5. Trovare una base che diagonalizzi la matrice $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$.

6. Sia $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ data da $f(z_1, z_2) = (-iz_2, iz_1 + z_2)$. Trovare $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ dove $\mathcal{B} = ((1, i), (2i, 1))$.

7. Trovare $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ unitario, ortogonale a $(1 + 2i, 3 - i)$ e con z_1 reale positivo.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 27/5/06 — Esercizî

1. Al variare di k in $\mathbb{R}$ si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 2k & 0 & 1 \\ k & k & 1 \\ 0 & 2k & 1 \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Si dimostri che $\det A_k = 0$ per ogni k.

(B) (4 punti) Si calcoli il polinomio caratteristico di A_k.

(C) (3 punti) Si calcolino gli autovalori di A_k.

(D) (3 punti) Si determinino i valori di k per cui la matrice A_k è diagonalizzabile.

2. Si consideri al variare di k in $\mathbb{C}$ il seguente sottospazio affine di $\mathbb{C}^3$:

$$V_k = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : \ iz_1 - iz_2 - z_3 = -1, \ -kz_1 + (1+k)z_2 = -ik\}.$$

(A) (3 punti) Si trovi un'equazione parametrica di V_k.

(B) (3 punti) Si provi che V_k è sempre contenuto nel sottospazio

$$E = (i, 1, -i) + \mathrm{Span}((1, 1, 0), (1, 0, i)).$$

(C) (3 punti) Si determini un valore k_0 tale che V_{k_0} risulti parallelo al sottospazio

$$W = (1, 1, 0) + \mathrm{Span}((2, 1, i)).$$

(D) (3 punti) Si determini un vettore unitario di $\mathbb{C}^3$ ortogonale al sottospazio vettoriale associato a $V_{k_0} + W$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 27/5/06 — Quesiti

Risposte esatte

5. ♢

1. No, possono non essere linearmente indipendenti.

2. X ha dimensione 4, dunque tra 2 e 6.

3. $x_1 + x_2 + x_3 = 1,\ 2x_1 = 2,\ 3x_1 = 3.$

4. $6i$.

5. $(2, 1),\ (1, 3)$.

6. $\begin{pmatrix} 5 & i \\ i & -2 \end{pmatrix}/3$.

7. $(10, -1 + 7i)/\sqrt{150}$.

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡