UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 19/6/06 — Quesiti

Nome _____ **Cognome** _____ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Risolvere il sistema $2x - y + z = 2,\ x + 7y - z = 10,\ 3x - 2y + 4z = 0$.

2. Se $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ e $B = -i \cdot A$, qual è il legame tra $\det(A)$ e $\det(B)$?

3. Trovare la proiezione ortogonale del punto $(1 - i, 3i)$
sulla retta in $\mathbb{C}^2$ generata dal vettore $(2 + i, 1 + 2i)$.

4. In quanti modi si può completare a una base di $\mathbb{C}^3$ un sistema di 2 vettori linearmente indipendenti?

5. Se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ è lineare e $f(1, 2, 2) = (1, 1),\ f(1, 1, 0) = (2, -1),\ f(2, 0, -1) = (4, -9)$,
quanto fa $f(1, 0, 0)$? Perché?

6. Siano $X = \mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R})$ e $Y = \{f \in X :\ f(0) \cdot f(1) = 0\}$.
Dire se Y sia un sottospazio di X e spiegare perché.

7. Ortonormalizzare la base $(1, -1, 2), (-3, 1, 1), (0, -1, 0)$ di $\mathbb{R}^3$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♢ 2. ♠ 3. ♣ 4. ♡ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♠

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 19/6/06 — Esercizî

1. Per ogni k in $\mathbb{R}$ si consideri l'applicazione lineare $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$f_k \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2k & -k^2 & k/2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & k & 0 \\ 2(k+1) & 0 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

(A) (3 punti) Si calcoli $\mathrm{Dim}(f_k)$ al variare di k in $\mathbb{R}$.

(B) (3 punti) Si trovino equazioni parametriche di $\mathrm{Ker}(f_k)$.

(C) (3 punti) Si trovino equazioni cartesiane di $\mathrm{Im}(f_1)$.

(D) (3 punti) Si determini un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $g \circ f_1 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ e $g(1,0,0,0) = 0$ e si calcoli la matrice che rappresenta g rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$.

2. Per k in $\mathbb{R}$ si consideri il sottospazio affine di $\mathbb{R}^4$

$$E_k = (0,0,1,-1) + \mathrm{Span}((1,0,1,0),(4k-2,-1,1,0)).$$

(A) (3 punti) Si trovino equazioni cartesiane per E_k.

(B) (5 punti) Si studi al variare di k la posizione reciproca dei sottospazi E_k e

$$F_k = -(k+2,1,k-2,1) + \mathrm{Span}((1,0,1+k,-k),(k+4,2-k,-2,0)).$$

(C) (4 punti) Si trovi un generatore v del sottospazio ortogonale al sottospazio vettoriale che si ottiene sommando i traslati nell'origine di E_3 ed F_3.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 19/6/06 — Quesiti

Risposte esatte

9. ♣

1. $(2, 1, -1)$.

2. $\det(B) = i \cdot \det(A)$.

3. $7(2 + i, 1 + 2i)/10$.

4. Infiniti, bisogna prendere un vettore fuori dal piano generato dai vettori assegnati.

5. $(1, 0, 0) = ((1, 2, 2) - 2(1, 1, 0) + 2((2, 0, -1))/3$
$\Rightarrow \ f(1, 0, 0) = ((1, 1) - 2(2, -1) + 2(4, -9))/3 = (5/3, -5)$.

6. No: se $y_0(t) = t$ e $y_1(t) = 1 - t$ si ha $y_0, y_1 \in Y$ ma $y_0 + y_1 \notin Y$.

7. $(1, -1, 2)/\sqrt{6}$, $(-8, 2, 5)/\sqrt{93}$, $-(3, 7, 2)/\sqrt{62}$.

1. ♢ 2. ♠ 3. ♣ 4. ♡ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♠