UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 19/6/06 — Quesiti

Nome _____ **Cognome** _____ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. In quanti modi si può completare a una base di $\mathbb{C}^3$ un sistema di 2 vettori linearmente indipendenti?

2. $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ è lineare e $f(i, 2) = (1, 5i)$, $f(1, i) = (2i, -1)$, quanto fa $f(1, 0)$? Perché?

3. Risolvere il sistema $3x - y + z = 4,\ x + 2y - 5z = 2,\ 4x + y + 2z = 0$.

4. Ortonormalizzare la base $(1, -1, 2), (-3, 1, 1), (0, -1, 0)$ di $\mathbb{R}^3$.

5. Trovare la proiezione ortogonale del punto $(1 - i, 3i)$
sulla retta in $\mathbb{C}^2$ generata dal vettore $(2 + i, 1 + 2i)$.

6. Se $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ e $B = -i \cdot A$, qual è il legame tra $\det(A)$ e $\det(B)$?

7. Siano $V = \mathcal{F}([0, 1], \mathbb{C})$ e $W = \{\varphi \in V :\ \varphi(0) \cdot \varphi(1) = 0\}$.
Dire se W sia un sottospazio di V e spiegare perché.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 19/6/06 — Esercizî

1. Per ogni k in $\mathbb{R}$ si consideri l'applicazione lineare $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$f_k \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2k & -k^2 & k/2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & k & 0 \\ 2(k+1) & 0 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

(A) (3 punti) Si calcoli $\mathrm{Dim}(f_k)$ al variare di k in $\mathbb{R}$.

(B) (3 punti) Si trovino equazioni parametriche di $\mathrm{Ker}(f_k)$.

(C) (3 punti) Si trovino equazioni cartesiane di $\mathrm{Im}(f_1)$.

(D) (3 punti) Si determini un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $g \circ f_1 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ e $g(1,0,0,0) = 0$ e si calcoli la matrice che rappresenta g rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$.

2. Per k in $\mathbb{R}$ si consideri il sottospazio affine di $\mathbb{R}^4$

$$E_k = (0,0,1,-1) + \mathrm{Span}((1,0,1,0),(4k-2,-1,1,0)).$$

(A) (3 punti) Si trovino equazioni cartesiane per E_k.

(B) (5 punti) Si studi al variare di k la posizione reciproca dei sottospazi E_k e

$$F_k = -(k+2,1,k-2,1) + \mathrm{Span}((1,0,1+k,-k),(k+4,2-k,-2,0)).$$

(C) (4 punti) Si trovi un generatore v del sottospazio ortogonale al sottospazio vettoriale che si ottiene sommando i traslati nell'origine di E_3 ed F_3.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Risposte esatte

5. ♡

1. Infiniti, bisogna prendere un vettore fuori dal piano generato dai vettori assegnati.

2. $(1,0) = (-i(i,2) + 2(1,i))/3$
$\Rightarrow\ f(1,0) = (-i(1,5i) + 2(2i,-1))/3 = (i,1)$.

3. $(1,-2,-1)$.

4. $(1,-1,2)/\sqrt{6}$, $(-8,2,5)/\sqrt{93}$, $-(3,7,2)/\sqrt{62}$.

5. $7(2+i, 1+2i)/10$.

6. $\det(B) = i \cdot \det(A)$.

7. No: se $\varphi_0(t) = t$ e $\varphi_1(t) = 1-t$ si ha $\varphi_0, \varphi_1 \in Y$ ma $\varphi_0 + \varphi_1 \notin Y$.

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡