



Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 19/6/06 — Quesiti

Nome _____ Cognome _____ Matricola _____

1. In quanti modi si può completare a una base di $\mathbb{R}^4$ un sistema di 3 vettori linearmente indipendenti?

2. Se $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ è lineare e $f(1, 2, 2) = (1, 1)$, $f(1, 1, 0) = (2, -1)$, $f(2, 0, -1) = (4, -9)$, quanto fa $f(1, 0, 0)$? Perché?

3. Risolvere il sistema $2x - y + z = 2$, $x + 7y - z = 10$, $3x - 2y + 4z = 0$.

4. Ortonormalizzare la base $(2, -1, 1)$, $(1, 1, -3)$, $(0, 0, 1)$ di $\mathbb{R}^3$.

5. Trovare la proiezione ortogonale del punto $(1 + i, -i)$ sulla retta in $\mathbb{C}^2$ generata dal vettore $(2 + i, 1 - 3i)$.

6. Se $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{C})$ e $B = 2i \cdot A$, qual è il legame tra $\det(A)$ e $\det(B)$?

7. Siano $X = \mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R})$ e $Y = \{f \in X : f(0) \cdot f(1) = 0\}$. Dire se Y sia un sottospazio di X e spiegare perché.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♦ 5. ♦ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♦ 9. ♣ 10. ♡



1. Per ogni k in $\mathbb{R}$ si consideri l'applicazione lineare $f_k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definita da

$$f_k \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2k & -k^2 & k/2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & k & 0 \\ 2(k+1) & 0 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

- (A) (3 punti) Si calcoli $\text{Dim}(f_k)$ al variare di k in $\mathbb{R}$.
(B) (3 punti) Si trovino equazioni parametriche di $\text{Ker}(f_k)$.
(C) (3 punti) Si trovino equazioni cartesiane di $\text{Im}(f_1)$.
(D) (3 punti) Si determini un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $g \circ f_1 = \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ e $g(1, 0, 0, 0) = 0$ e si calcoli la matrice che rappresenta g rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$.

2. Per k in $\mathbb{R}$ si consideri il sottospazio affine di $\mathbb{R}^4$

$$E_k = (0, 0, 1, -1) + \text{Span}((1, 0, 1, 0), (4k - 2, -1, 1, 0)).$$

- (A) (3 punti) Si trovino equazioni cartesiane per E_k .
(B) (5 punti) Si studi al variare di k la posizione reciproca dei sottospazi E_k e

$$F_k = -(k + 2, 1, k - 2, 1) + \text{Span}((1, 0, 1 + k, -k), (k + 4, 2 - k, -2, 0)).$$

- (C) (4 punti) Si trovi un generatore v del sottospazio ortogonale al sottospazio vettoriale che si ottiene sommando i traslati nell'origine di E_3 ed F_3 .



Risposte esatte

5. $\diamond$

1. Infiniti, bisogna prendere un vettore fuori dal 3-spazio generato dai vettori assegnati.

2. $(1, 0, 0) = ((1, 2, 2) - 2(1, 1, 0) + 2((2, 0, -1))/3$
 $\Rightarrow f(1, 0, 0) = ((1, 1) - 2(2, -1) + 2(4, -9))/3 = (5/3, -5).$

3. $(2, 1, -1).$

4. $(2, -1, 1)/\sqrt{6}, (5, 2, -8)/\sqrt{93}, (2, 7, 3)/\sqrt{62}.$

5. $2(2 + i, 1 - 3i)/5.$

6. $\det(B) = -8i \cdot \det(A).$

7. No: se $y_0(t) = t$ e $y_1(t) = 1 - t$ si ha $y_0, y_1 \in Y$ ma $y_0 + y_1 \notin Y.$

1. $\heartsuit$ 2. $\clubsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\diamond$ 5. $\diamond$ 6. $\spadesuit$ 7. $\spadesuit$ 8. $\diamond$ 9. $\clubsuit$ 10. $\heartsuit$
