UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 16/9/06 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Se $V = \{v \in \mathbb{R}^6 : \ v_1 + v_2 = v_3 + v_4 = v_5 + v_6 = 0\}$ e $V + W = \mathbb{R}^6$, che dimensione può avere W?

2. Trovare $v \in \mathbb{C}^2$ unitario, ortogonale a $(1+i, 1)$ e con prima coordinata reale positiva.

3. Esibire o spiegare perché non esiste $A \in \mathcal{M}_{4\times 5}(\mathbb{R})$ di rango 3.

4. Quante soluzioni ha il sistema $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 3x + 2y - z = 1 \\ 5x + 8y - 5z = 0 \end{cases}$?

5. In $\mathbb{R}^2$ sia $\mathcal{B} = (7e_1 + 3e_2, 2e_1 + e_2)$. Trovare $[e_1 + e_2]_{\mathcal{B}}$.

6. È diagonalizzabile la matrice $\begin{pmatrix} -8 & -25 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$? Perché?

7. Se $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{C}^4$ sono linearmente indipendenti, quanti modi ci sono di completarli a una base?

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♢ 4. ♣ 5. ♣ 6. ♠ 7. ♡ 8. ♠ 9. ♠ 10. ♢

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 16/9/06 — Esercizî

1. In $\mathbb{R}^3$ si considerino i vettori

$$v_1 = (1, 0, -1), \qquad v_2 = (0, 1, 0), \qquad v_3 = (1, -1, 1).$$

(A) Si mostri che formano una base di $\mathbb{R}^3$. (3 punti)

(B) Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tale che

$$f(v_1) = (1, 0, 0), \qquad f(v_2) = (-1, 1, 0), \qquad f(v_3) = 2v_3\,.$$

Si determini la matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$. (3 punti)

(C) Si calcoli il polinomio caratteristico di f. (3 punti)

(D) Si determinino tutti gli autovalori reali di f. (3 punti)

2. In $\mathbb{C}^3$ si considerino i piani affini P e Q_k (dipendente dal parametro $k \in \mathbb{C}$) così definiti:

$$P = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : \ z_1 - iz_2 + (1 - i)z_3 = i\},$$
$$Q_k = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : \ kz_1 + \overline{k}z_2 + z_3 = 1\}.$$

(A) Si determini per quali $k \in \mathbb{C}$ i piani P e Q_k sono disgiunti. (3 punti)

(B) Si determini un'equazione parametrica della retta $l = P \cap Q_i$. (3 punti)

(C) Si determini un'equazione cartesiana del piano R ortogonale a l e passante per $(1, 0, 0)$. (3 punti)

(D) Si determini un'equazione parametrica di $R \cap P$. (3 punti)

Risposte esatte

9. ♠

1. Tra 3 e 6.

2. $(1, -1+i)/\sqrt{3}$.

3. $(e_1, e_2, e_3, 0, 0)$.

4. Nessuna.

5. $(-1, 4)$.

6. No, ha autovalore 2 doppio ma non è 2I.

7. Infiniti.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♢ 4. ♣ 5. ♣ 6. ♠ 7. ♡ 8. ♠ 9. ♠ 10. ♢