UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 16/9/06 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Esibire o spiegare perché non esiste $A \in \mathcal{M}_{3\times 5}(\mathbb{R})$ di rango 4.

2. Se $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^5$ sono linearmente indipendenti, quanti modi ci sono di completarli a una base?

3. In $\mathbb{R}^2$ sia $\mathcal{B} = (e_1 + 2e_2, 3e_1 + 5e_2)$. Trovare $[e_1 + e_2]_{\mathcal{B}}$.

4. È diagonalizzabile la matrice $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$? Perché?

5. Se $X = \{x \in \mathbb{R}^5 : \ x_1 - x_2 + x_3 = x_3 - x_4 + x_5 = 0\}$ e $X + Y = \mathbb{R}^5$, che dimensione può avere Y?

6. Trovare $v \in \mathbb{C}^2$ unitario, ortogonale a $(1, 1-i)$ e con seconda coordinata reale positiva.

7. Quante soluzioni ha il sistema $\begin{cases} x + 3y - 2z = 4 \\ 2x + y + z = 1 \\ -x + 7y - 8z = -10 \end{cases}$?

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♢ 4. ♣ 5. ♣ 6. ♠ 7. ♡ 8. ♠ 9. ♡ 10. ♢

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 16/9/06 — Esercizî

1. In $\mathbb{R}^3$ si considerino i vettori

$$v_1 = (1, 0, -1), \qquad v_2 = (0, 1, 0), \qquad v_3 = (1, -1, 1).$$

(A) Si mostri che formano una base di $\mathbb{R}^3$. (3 punti)

(B) Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tale che

$$f(v_1) = (1, 0, 0), \qquad f(v_2) = (-1, 1, 0), \qquad f(v_3) = 2v_3\,.$$

Si determini la matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$. (3 punti)

(C) Si calcoli il polinomio caratteristico di f. (3 punti)

(D) Si determinino tutti gli autovalori reali di f. (3 punti)

2. In $\mathbb{C}^3$ si considerino i piani affini P e Q_k (dipendente dal parametro $k \in \mathbb{C}$) così definiti:

$$P = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : \; z_1 - iz_2 + (1-i)z_3 = i\},$$
$$Q_k = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : \; kz_1 + \overline{k}z_2 + z_3 = 1\}.$$

(A) Si determini per quali $k \in \mathbb{C}$ i piani P e Q_k sono disgiunti. (3 punti)

(B) Si determini un'equazione parametrica della retta $l = P \cap Q_i$. (3 punti)

(C) Si determini un'equazione cartesiana del piano R ortogonale a l e passante per $(1, 0, 0)$. (3 punti)

(D) Si determini un'equazione parametrica di $R \cap P$. (3 punti)

Risposte esatte

9. ♡

1. Non esiste, il rango è al massimo 3.

2. Infiniti.

3. $(-2, 1)$.

4. Sì, ha autovalori 4 e -7, reali e distinti.

5. Tra 2 e 5.

6. $(-1-i, 1)/\sqrt{3}$.

7. Nessuna.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♢ 4. ♣ 5. ♣ 6. ♠ 7. ♡ 8. ♠ 9. ♡ 10. ♢