UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 16/9/06 — Quesiti

Nome _____ **Cognome** _____ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Se $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^5$ sono linearmente indipendenti, quanti modi ci sono di completarli a una base?

2. Se $V = \{v \in \mathbb{R}^6 : \ v_1 + v_2 = v_3 + v_4 = v_5 + v_6 = 0\}$ e $V + W = \mathbb{R}^6$, che dimensione può avere W?

3. Quante soluzioni ha il sistema $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 3x + 2y - z = 1 \\ 5x + 8y - 5z = 0 \end{cases}$?

4. Esibire o spiegare perché non esiste $A \in \mathcal{M}_{3\times 5}(\mathbb{R})$ di rango 4.

5. È diagonalizzabile la matrice $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$? Perché?

6. In $\mathbb{R}^2$ sia $\mathcal{B} = (7e_1 + 3e_2, 2e_1 + e_2)$. Trovare $[e_1 + e_2]_{\mathcal{B}}$.

7. Trovare $v \in \mathbb{C}^2$ unitario, ortogonale a $(1, 1 - i)$ e con seconda coordinata reale positiva.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 16/9/06 — Esercizî

1. In $\mathbb{R}^3$ si considerino i vettori

$$v_1 = (1, 0, -1), \qquad v_2 = (0, 1, 0), \qquad v_3 = (1, -1, 1).$$

(A) Si mostri che formano una base di $\mathbb{R}^3$. (3 punti)

(B) Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tale che

$$f(v_1) = (1, 0, 0), \qquad f(v_2) = (-1, 1, 0), \qquad f(v_3) = 2v_3\,.$$

Si determini la matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$. (3 punti)

(C) Si calcoli il polinomio caratteristico di f. (3 punti)

(D) Si determinino tutti gli autovalori reali di f. (3 punti)

2. In $\mathbb{C}^3$ si considerino i piani affini P e Q_k (dipendente dal parametro $k \in \mathbb{C}$) così definiti:

$$P = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : \ z_1 - iz_2 + (1 - i)z_3 = i\},$$
$$Q_k = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : \ kz_1 + \overline{k}z_2 + z_3 = 1\}.$$

(A) Si determini per quali $k \in \mathbb{C}$ i piani P e Q_k sono disgiunti. (3 punti)

(B) Si determini un'equazione parametrica della retta $l = P \cap Q_i$. (3 punti)

(C) Si determini un'equazione cartesiana del piano R ortogonale a l e passante per $(1, 0, 0)$. (3 punti)

(D) Si determini un'equazione parametrica di $R \cap P$. (3 punti)

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 16/9/06 — Quesiti

Risposte esatte

5. ♡

1. Infiniti.

2. Tra 3 e 6.

3. Nessuna.

4. Non esiste, il rango è al massimo 3.

5. Sì, ha autovalori 4 e -7, reali e distinti.

6. $(-1, 4)$.

7. $(-1 - i, 1)/\sqrt{3}$.

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡