UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 16/9/06 — Quesiti

Nome _____ **Cognome** _____ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Se $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{C}^4$ sono linearmente indipendenti, quanti modi ci sono di completarli a una base?

2. Se $X = \{x \in \mathbb{R}^5 : \ x_1 - x_2 + x_3 = x_3 - x_4 + x_5 = 0\}$ e $X + Y = \mathbb{R}^5$, che dimensione può avere Y?

3. Quante soluzioni ha il sistema $\begin{cases} x + 3y - 2z = 4 \\ 2x + y + z = 1 \\ -x + 7y - 8z = -10 \end{cases}$?

4. Esibire o spiegare perché non esiste $A \in \mathcal{M}_{4\times 5}(\mathbb{R})$ di rango 3.

5. È diagonalizzabile la matrice $\begin{pmatrix} -8 & -25 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$? Perché?

6. In $\mathbb{R}^2$ sia $\mathcal{B} = (e_1 + 2e_2, 3e_1 + 5e_2)$. Trovare $[e_1 + e_2]_{\mathcal{B}}$.

7. Trovare $v \in \mathbb{C}^2$ unitario, ortogonale a $(1 + i, 1)$ e con prima coordinata reale positiva.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 16/9/06 — Esercizî

1. In $\mathbb{R}^3$ si considerino i vettori

$$v_1 = (1, 0, -1), \qquad v_2 = (0, 1, 0), \qquad v_3 = (1, -1, 1).$$

(A) Si mostri che formano una base di $\mathbb{R}^3$. (3 punti)

(B) Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tale che

$$f(v_1) = (1, 0, 0), \qquad f(v_2) = (-1, 1, 0), \qquad f(v_3) = 2v_3\,.$$

Si determini la matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$. (3 punti)

(C) Si calcoli il polinomio caratteristico di f. (3 punti)

(D) Si determinino tutti gli autovalori reali di f. (3 punti)

2. In $\mathbb{C}^3$ si considerino i piani affini P e Q_k (dipendente dal parametro $k \in \mathbb{C}$) così definiti:

$$P = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : \ z_1 - iz_2 + (1 - i)z_3 = i\},$$
$$Q_k = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : \ kz_1 + \overline{k}z_2 + z_3 = 1\}.$$

(A) Si determini per quali $k \in \mathbb{C}$ i piani P e Q_k sono disgiunti. (3 punti)

(B) Si determini un'equazione parametrica della retta $l = P \cap Q_i$. (3 punti)

(C) Si determini un'equazione cartesiana del piano R ortogonale a l e passante per $(1, 0, 0)$. (3 punti)

(D) Si determini un'equazione parametrica di $R \cap P$. (3 punti)

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 16/9/06 — Quesiti

Risposte esatte

5. ♢

1. Infiniti.

2. Tra 2 e 5.

3. Nessuna.

4. $(e_1, e_2, e_3, 0, 0)$.

5. No, ha autovalore 2 doppio ma non è 2I.

6. $(-2, 1)$.

7. $(1, -1 + i)/\sqrt{3}$.

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡