



 Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 16/9/06 — Quesiti

Nome _____ Cognome _____ Matricola _____

1. Se $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{C}^4$ sono linearmente indipendenti, quanti modi ci sono di completarli a una base?

2. Se $X = \{x \in \mathbb{R}^5 : x_1 - x_2 + x_3 = x_3 - x_4 + x_5 = 0\}$ e $X + Y = \mathbb{R}^5$, che dimensione può avere Y ?

3. Quante soluzioni ha il sistema
$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 4 \\ 2x + y + z = 1 \\ -x + 7y - 8z = -10 \end{cases} \quad ?$$

4. Esibire o spiegare perché non esiste $A \in \mathcal{M}_{4 \times 5}(\mathbb{R})$ di rango 3.

5. È diagonalizzabile la matrice $\begin{pmatrix} -8 & -25 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$? Perché?

6. In $\mathbb{R}^2$ sia $\mathcal{B} = (e_1 + 2e_2, 3e_1 + 5e_2)$. Trovare $[e_1 + e_2]_{\mathcal{B}}$.

7. Trovare $v \in \mathbb{C}^2$ unitario, ortogonale a $(1 + i, 1)$ e con prima coordinata reale positiva.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

 1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♦ 5. ◇ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♦ 9. ♣ 10. ♡



1. In $\mathbb{R}^3$ si considerino i vettori

$$v_1 = (1, 0, -1), \quad v_2 = (0, 1, 0), \quad v_3 = (1, -1, 1).$$

(A) Si mostri che formano una base di $\mathbb{R}^3$. (3 punti)

(B) Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, tale che

$$f(v_1) = (1, 0, 0), \quad f(v_2) = (-1, 1, 0), \quad f(v_3) = 2v_3.$$

Si determini la matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$. (3 punti)

(C) Si calcoli il polinomio caratteristico di f . (3 punti)

(D) Si determinino tutti gli autovalori reali di f . (3 punti)

2. In $\mathbb{C}^3$ si considerino i piani affini P e Q_k (dipendente dal parametro $k \in \mathbb{C}$) così definiti:

$$P = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : z_1 - iz_2 + (1 - i)z_3 = i\},$$
$$Q_k = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : kz_1 + \bar{k}z_2 + z_3 = 1\}.$$

(A) Si determini per quali $k \in \mathbb{C}$ i piani P e Q_k sono disgiunti. (3 punti)

(B) Si determini un'equazione parametrica della retta $l = P \cap Q_i$. (3 punti)

(C) Si determini un'equazione cartesiana del piano R ortogonale a l e passante per $(1, 0, 0)$. (3 punti)

(D) Si determini un'equazione parametrica di $R \cap P$. (3 punti)



Risposte esatte

5. $\diamond$

1. Infiniti.
2. Tra 2 e 5.
3. Nessuna.
4. $(e_1, e_2, e_3, 0, 0)$.
5. No, ha autovalore 2 doppio ma non è $2I$.
6. $(-2, 1)$.
7. $(1, -1 + i)/\sqrt{3}$.

1. $\heartsuit$ 2. $\clubsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\diamondsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\spadesuit$ 8. $\diamondsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\heartsuit$
