UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 15/02/06 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Quante basi diverse di $\mathbb{C}^2$ si possono costruire con vettori appartenenti all'insieme $\{e_1, e_1 + (1 + i)e_2, ie_1 + (-1 + i)e_2, (1 - i)e_1 + 2e_2\}$? Elencarle.

2. Può esistere una applicazione lineare $f : \{x \in \mathbb{R}^5 :\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0\} \to \mathbb{R}_{\leqslant 3}[t]$ iniettiva e tale che $1 + t + t^2 + t^3 \notin \mathrm{Im}(f)$? Esibirla oppure spiegare perché non può esistere.

3. Risolvere il sistema $x - y + 2z = -5,\ 2x + y - z = 8, -x + 2y + z = -3$.

4. Ortonormalizzare la base $e_1 + 3e_3, e_1 - 2e_2, e_1 - e_2 - e_3$ di $\mathbb{R}^3$.

5. Trovare un vettore di $\mathbb{C}^3$ unitario, ortogonale a $\mathrm{Span}(e_1 - ie_3, e_2 + 2ie_3)$ ed avente prima coordinata reale positiva.

6. È vero che se due matrici 3×3 complesse invertibili differiscono solo nella seconda riga, che consiste per entrambe di numeri reali, allora il rapporto tra i loro determinanti è reale? Fornire un controesempio o spiegare perché ciò accada sempre.

7. Se $X = \mathrm{Span}(e_1 - e_3 + e_4 + e_5, e_1 - e_2 + 2e_4 - e_5, e_1 + e_2 - 2e_3 + 3e_5) \subset \mathbb{R}^5$ e $X + Y = \mathbb{R}^5$, che dimensione può avere Y?

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 15/02/06 — Esercizî

1. Siano $V = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $W_\lambda = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2\lambda \\ -2\lambda \\ 2-4\lambda \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+\lambda \\ -1-\lambda \\ -2\lambda \\ 1+\lambda \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^4$.

(A) (3 punti) Si trovino le dimensioni di V e di W_λ al variare di λ.

(B) (5 punti) Sia $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ tale che $T \circ T = 0$. Si dimostri che $\operatorname{rank}(T) \leqslant 2$.

(C) (4 punti) Si trovino i λ per cui esiste $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ tale che $T \circ T = 0$ e $T(V) = W_\lambda$.

2. Siano $E = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1+2i \\ i-2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$, $F = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{C}^4$.

(A) (3 punti) Si dica se E e F sono paralleli.

(B) (3 punti) Sia $\mathcal{U} = \{T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^4, \mathbb{C}) : T(x) = 1 \text{ per ogni } x \in E\}$. Si dimostri che $\mathcal{U}$ è un sottospazio affine di $\mathcal{L}(\mathbb{C}^4, \mathbb{C})$ e se ne trovino equazioni cartesiane.

(C) (3 punti) Si dica se esiste un'applicazione lineare $T : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}$ tale che $T(x) = 1$ per ogni $x \in E$ e per ogni $x \in F$.

(D) (3 punti) Sia $\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^4, \mathbb{C}^4) : f(E) \subset F\}$. Si dimostri che $\mathcal{A}$ è non vuoto. Si provi inoltre che è un sottospazio affine di $\mathcal{L}(\mathbb{C}^4, \mathbb{C}^4)$ e se ne calcoli la dimensione.

Risposte esatte

5. ♡

1. Sono sei: $(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4)$ e le medesime con ordine scambiato

2. No: il dominio ha dimensione 4 e l'immagine ha dimensione al più 3

3. $2, 1, -3$

4. $(1, 0, 3)/\sqrt{10},\ (9, -20, -3)/7\sqrt{10},\ (6, 3, -2)/7$

5. $(1, -2, i)/\sqrt{6}$

6. No: $\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7. Tra 3 e 5

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡