UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 15/02/06 — Quesiti

Nome _____ **Cognome** _____ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Quante basi diverse di $\mathbb{C}^2$ si possono costruire con vettori appartenenti all'insieme $\{e_1 + ie_2, e_1 - ie_2, -ie_1 + e_2, ie_1 + e_2\}$? Elencarle.

2. Può esistere una applicazione lineare $f : \{x \in \mathbb{R}^5 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0\} \to \mathbb{R}_{\leqslant 2}[t]$ surgettiva e tale che $f(e_1 - e_2) = f(e_1 - e_3)$? Esibirla oppure spiegare perché non può esistere.

3. Risolvere il sistema $x - y + 2z = -6,\ 2x + y - z = 7, -x + 2y + z = 3$.

4. Ortonormalizzare la base $e_1 + 2e_2, e_2 - 3e_3, e_1 + e_2 - e_3$ di $\mathbb{R}^3$.

5. Trovare un vettore di $\mathbb{C}^3$ unitario, ortogonale a $\mathrm{Span}(e_1 + ie_2, e_2 - ie_3)$ ed avente terza coordinata reale positiva.

6. È vero che se due matrici 3×3 complesse invertibili differiscono solo nella seconda colonna, che consiste per entrambe di numeri reali, allora il rapporto tra i loro determinanti è reale? Fornire un controesempio o spiegare perché ciò accada sempre.

7. Se $X = \{x \in \mathbb{R}^5 : x_1 - x_2 + x_3 - x_5 = x_1 + 2x_3 + x_4 = x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0\}$ e $X + Y = \mathbb{R}^5$, che dimensione può avere Y?

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 15/02/06 — Esercizî

1. Siano $V = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $W_\lambda = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2\lambda \\ -2\lambda \\ 2-4\lambda \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+\lambda \\ -1-\lambda \\ -2\lambda \\ 1+\lambda \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^4$.

(A) (3 punti) Si trovino le dimensioni di V e di W_λ al variare di λ.

(B) (5 punti) Sia $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ tale che $T \circ T = 0$. Si dimostri che $\mathrm{rank}(T) \leqslant 2$.

(C) (4 punti) Si trovino i λ per cui esiste $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ tale che $T \circ T = 0$ e $T(V) = W_\lambda$.

2. Siano $E = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1+2i \\ i-2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$, $F = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{C}^4$.

(A) (3 punti) Si dica se E e F sono paralleli.

(B) (3 punti) Sia $\mathcal{U} = \{T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^4, \mathbb{C}) : T(x) = 1 \text{ per ogni } x \in E\}$. Si dimostri che $\mathcal{U}$ è un sottospazio affine di $\mathcal{L}(\mathbb{C}^4, \mathbb{C})$ e se ne trovino equazioni cartesiane.

(C) (3 punti) Si dica se esiste un'applicazione lineare $T : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}$ tale che $T(x) = 1$ per ogni $x \in E$ e per ogni $x \in F$.

(D) (3 punti) Sia $\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^4, \mathbb{C}^4) : f(E) \subset F\}$. Si dimostri che $\mathcal{A}$ è non vuoto. Si provi inoltre che è un sottospazio affine di $\mathcal{L}(\mathbb{C}^4, \mathbb{C}^4)$ e se ne calcoli la dimensione.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Risposte esatte

5. $\diamondsuit$

1. Sono otto: $(v_1, v_2), (v_1, v_4), (v_2, v_3), (v_3, v_4)$ e le medesime con ordine scambiato

2. Sì: $f(e_1 - e_2) = 1,\ f(e_2 - e_3) = 0,\ f(e_3 - e_4) = t,\ f(e_4 - e_5) = t^2$.

3. $1, 3, -2$

4. $(1, 2, 0)/\sqrt{5},\ (-2, 1, -15)/\sqrt{230},\ (6, -3, -1)/\sqrt{46}$

5. $(1, -i, 1)/\sqrt{3}$

6. No: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7. Tra 2 e 5

1. $\heartsuit$ 2. $\clubsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\diamondsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\spadesuit$ 8. $\diamondsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\heartsuit$