UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 09/01/06 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Trovare equazioni cartesiane di $(e_2 + 3e_3) + \mathrm{Span}(e_1 + 2e_3 + e_4, e_1 - e_2 - 3e_4) \subset \mathbb{R}^4$.

2. Può esistere $A \in \mathcal{M}_{4\times 5}(\mathbb{R})$ con una riga linearmente dipendente dalle altre tale che ogni sistema $Ax = b$ abbia almeno una soluzione? Esibire A o spiegare perché non può esistere.

3. Quante applicazioni lineari iniettive $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ esistono tali che $f(\{e_1 - e_2, e_2 - e_3, e_3 - e_4\}) = \{e_1 + e_2, e_2 - e_3, e_3 - e_1\}$?

4. È possibile trovare in $\mathbb{C}^4$ un sistema linearmente indipendente su $\mathbb{C}$ composto da 5 vettori? Esibirlo o spiegare perché non esiste.

5. Determinare un vettore di $\mathbb{C}^3$ unitario, ortogonale a $(1-i, 1+i, -2i)$ ed avente seconda coordinata immaginaria pura.

6. Quante soluzioni può avere un sistema lineare non omogeneo di 5 equazioni in 7 incognite?

7. Siano $\mathcal{B} = (e_1 - 2e_2, e_1 - 3e_2)$, $\mathcal{C} = (e_1 + e_2, 2e_1 - e_2)$ e $[v]_{\mathcal{B}} = (1, -1)$. Trovare $[v]_{\mathcal{C}}$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♣ 4. ♡ 5. ♠ 6. ♢ 7. ♢ 8. ♣ 9. ♡ 10. ♠

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 09/01/06 — Esercizî

1. Per $k \in \mathbb{R}$ sia $T_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ data da $T_k(x) = A_k \cdot x$, dove

$$A_k = \begin{pmatrix} (k+1)/2 & (4-k)/2 & (k-4)/2 & 1/2 \\ (11-k-2k^2)/2 & k/2 & (4-k)/2 & k^2-9/2 \\ 5-k^2 & -2 & 4 & k^2-5 \\ (k-1)/2 & (2-k)/2 & (k-2)/2 & 5/2 \end{pmatrix}.$$

(A) (4 punti) Si trovi, verificando che è triangolare superiore, la matrice $[T_k]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$, dove

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right).$$

(B) (4 punti) Si calcolino gli autovalori di T_k e le relative molteplicità algebriche.

(C) (4 punti) Si calcolino le molteplicità geometriche degli autovalori della T_k e si discuta per quali k essa sia diagonalizzabile.

2. Si considerino in $\mathbb{R}^3$ i sottospazi affini

$$E = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \qquad F = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

e l'insieme L_k delle soluzioni del sistema lineare dipendente dal parametro reale k

$$\begin{cases} -5kx - (6+2k)y + (3+k)z = 9+3k, \\ x + y - 2z = 9. \end{cases}$$

(A) (4 punti) Si dimostri che E e F sono paralleli e disgiunti.

(B) (3 punti) Si trovi una equazione cartesiana per F e si deduca che $L_k \subset F$.

(C) (3 punti) Si dica per quali k si ha che L_k è parallelo a E.

(D) (2 punti) Si trovino equazioni cartesiane di $L_k + E$.

Risposte esatte

9. ♡

1. $2x_1 + 2x_2 - x_3 = -1,\ 6x_2 + x_3 - 2x_4 = 9$

2. No, A ha rango al più 3, dunque l'applicazione $\mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ associata non è surgettiva

3. Nessuna: i tre vettori assegnati in partenza sono linearmente indipendenti mentre quelli in arrivo non lo sono

4. No: $\mathbb{C}^4$ ha dimensione 4 dunque al massimo un sistema linearmente indipendente consiste di 4 vettori

5. $(0, 2i, -1+i)/\sqrt{6}$

6. Nessuna o infinite

7. $(2/3, -1/3)$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♣ 4. ♡ 5. ♠ 6. ♢ 7. ♢ 8. ♣ 9. ♡ 10. ♠