UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 8/7/06 — Quesiti

Nome _____ **Cognome** _____ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Qual è la base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che $[x]_{\mathcal{B}} = (x_2 - x_3, x_1, x_1 + x_2)$ per ogni $x = (x_1, x_2, x_3)$ in $\mathbb{R}^3$?

2. Trovare equazioni cartesiane di $(1, i, 1+i) + \mathrm{Span}((2, 1-i, 3i)) \subset \mathbb{C}^3$.

3. Calcolare $\det \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Esibire o spiegare perché non esiste una $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}_{\leqslant 2}[t]$ surgettiva tale che $f(e_1) = f(e_2) = f(e_4)$.

5. Esibire o spiegare perché non esiste un sistema di 5 vettori di $\mathbb{R}^4$ tale che eliminandone uno qualsiasi resti sempre una base.

6. Esibire o spiegare perché non esiste un sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 4 incognite privo di soluzioni.

7. Se X è uno spazio vettoriale reale, $\varphi : X \to X$ è lineare e $a : X \times X \to \mathbb{R}$ è un prodotto scalare su X, anche $b : X \times X \to \mathbb{R}$ data da $b(x, y) = a(\varphi(x), \varphi(y))$ è un prodotto scalare su X? Spiegare.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♢ 3. ♡ 4. ♠ 5. ♡ 6. ♣ 7. ♢ 8. ♠ 9. ♡ 10. ♡

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 8/7/06 — Esercizî

1. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ -5 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(A) Si provi che -3 è un autovalore di A e se ne calcoli il relativo autospazio. (2 punti)

(B) Si calcoli il polinomio caratteristico di A. (4 punti)

(C) Si determinino tutti gli autovalori reali e complessi di A. (3 punti)

(D) Si trovi una base di $\mathbb{C}^3$ di autovettori di A. (3 punti)

2. Si consideri la seguente matrice dipendente dal parametro reale k:

$$A_k = \begin{pmatrix} 5/2-k & 3/2-k & 1/2 & k-1 \\ k-2 & k-1 & 1 & 1-k \\ 3/2 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2-k & 1/2-k & 3/2 & k \end{pmatrix}.$$

(A) Si calcolino il determinante e il rango di A_k. (4 punti)

(B) Si trovino equazioni parametriche di $\mathrm{Ker}(A_k)$. (3 punti)

(C) Si mostri che il sistema

$$A_k \cdot x = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ha soluzione per ogni k. (3 punti)

(D) Si trovino equazioni cartesiane di $\mathrm{Im}(A_0)$. (2 punti)

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 8/7/06 — Quesiti

Risposte esatte

3. ♡

1. $((0,0,-1),(1,-1,-1),(0,1,1))$.

2. $(1-i)z_1 - 2z_2 = 1-3i,\ 3iz_1 - 2z - 3 = -2+i$.

3. 20.

4. Non esiste: $f(e_1) = f(e_2) = f(e_4) \Rightarrow e_1 - e_4, e_2 - e_4 \in \mathrm{Ker}(f) \Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}(f)) \geqslant 2$
$\Rightarrow \dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant \dim(\mathbb{R}^4) - 2 = 2 < 3 = \dim(\mathbb{R}_{\leqslant 2}[t])$.

5. $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$.

6. Non esiste: la soluzione nulla c'è sempre.

7. No: valgono bilinearità, simmetria e definizione non negativa, ma per la definizione positiva serve che φ sia iniettiva.

1. ♠ 2. ♢ 3. ♡ 4. ♠ 5. ♡ 6. ♣ 7. ♢ 8. ♠ 9. ♡ 10. ♡