UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 8/7/06 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Esibire o spiegare perché non esiste un sistema di 4 vettori di $\mathbb{C}^3$ tale che eliminandone uno qualsiasi resti sempre una base.

2. Qual è la base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che $[x]_{\mathcal{B}} = (x_2 - x_3, x_1, x_1 + x_2)$ per ogni $x = (x_1, x_2, x_3)$ in $\mathbb{R}^3$?

3. Esibire o spiegare perché non esiste un sistema lineare non omogeneo di 5 equazioni in 7 incognite avente soluzione unica.

4. Calcolare $\det \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Se X è uno spazio vettoriale reale, $\varphi : X \to X$ è lineare e $a : X \times X \to \mathbb{R}$ è un prodotto scalare su X, anche $b : X \times X \to \mathbb{R}$ data da $b(x, y) = a(\varphi(x), \varphi(y))$ è un prodotto scalare su X? Spiegare.

6. Esibire o spiegare perché non esiste una $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_{\leqslant 3}[t]$ iniettiva tale che $\mathrm{Span}(t, t^3) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.

7. Trovare equazioni cartesiane di $(2, i, 1 - i) + \mathrm{Span}((1, 1 + i, 2i)) \subset \mathbb{C}^3$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 8/7/06 — Esercizî

1. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ -5 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(A) Si provi che -3 è un autovalore di A e se ne calcoli il relativo autospazio. (2 punti)

(B) Si calcoli il polinomio caratteristico di A. (4 punti)

(C) Si determinino tutti gli autovalori reali e complessi di A. (3 punti)

(D) Si trovi una base di $\mathbb{C}^3$ di autovettori di A. (3 punti)

2. Si consideri la seguente matrice dipendente dal parametro reale k:

$$A_k = \begin{pmatrix} 5/2-k & 3/2-k & 1/2 & k-1 \\ k-2 & k-1 & 1 & 1-k \\ 3/2 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2-k & 1/2-k & 3/2 & k \end{pmatrix}.$$

(A) Si calcolino il determinante e il rango di A_k. (4 punti)

(B) Si trovino equazioni parametriche di $\mathrm{Ker}(A_k)$. (3 punti)

(C) Si mostri che il sistema

$$A_k \cdot x = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ha soluzione per ogni k. (3 punti)

(D) Si trovino equazioni cartesiane di $\mathrm{Im}(A_0)$. (2 punti)

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 8/7/06 — Quesiti

Risposte esatte

5. ♡

1. $(e_1, e_2, e_3, e_1 + e_2 + e_3)$.

2. $((0, 0, -1), (1, -1, -1), (0, 1, 1))$.

3. Non esiste: lo spazio affine delle soluzioni se non è vuoto ha dimensione almeno $7 - 5 = 2$.

4. 20.

5. No: valgono bilinearità, simmetria e definizione non negativa, ma per la definizione positiva serve che φ sia iniettiva.

6. Non esiste: $\mathrm{Span}(t, t^3) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\} \Rightarrow \dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant \dim(\mathbb{R}_{\leqslant 3}[t]) - \dim(\mathrm{Span}(t, t^3)) = 4 - 2 = 2$ $\Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}(f)) \geqslant \dim(\mathbb{R}^3) - 2 = 1$.

7. $(1 + i)z_1 - z_2 = 2 + i,\ 2iz_1 - z_3 = -1 + 5i$.

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡