



 Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 07/02/06 — Quesiti

Nome _____ Cognome _____ Matricola _____

1. Se $V = \text{Span}(v_1, \dots, v_4)$, può esistere v_5 che completi $(v_1, \dots, v_4)$ a una base di V ? Fare un esempio o spiegare perché non è possibile.

2. Possono esistere sottospazi non banali X, Y, Z di $\mathbb{R}^3$ tali che $X \oplus Y = X \oplus Z = Y \oplus Z = \mathbb{R}^3$? Esibirli oppure spiegare perché non possono esistere.

3. Determinare il coseno dell'angolo formato dai vettori $e_1 + 2\sqrt{26}e_2 + 4e_4$, $3e_1 + 2\sqrt{3}e_3 + 2e_4$ di $\mathbb{R}^4$.

4. Calcolare $\det \begin{pmatrix} -2 & 3 & -i \\ -i & 1-i & 1-2i \\ 1+i & i & -1 \end{pmatrix}$.

5. Trovare una base che diagonalizzi $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

6. Siano $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2, 3x_2 - x_3)$, $\mathcal{B} = (e_1 - e_2, 3e_1 + e_3, e_2 + 2e_3)$ e $\mathcal{C} = (2e_1 + 5e_2, e_1 + 3e_2)$. Trovare $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$.

7. Risolvere il sistema $x + 2y + 3z = 13$, $2x + y + 2z = 9$, $x + 5y + 7z = 30$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

 1. ♥ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♦ 5. ♥ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♦ 9. ♣ 10. ♥



1. Per $k \in \mathbb{R}$ sia $f_k : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$ data da $f_k(x) = A_k \cdot x$, dove

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ k & 1 & k+1 & 1 & -1 \\ -k & k+1 & 1 & k+1 & -1 \\ k & 1 & k+1 & 1 & k-1 \end{pmatrix}.$$

- (A) (3 punti) Si calcoli il rango di f_k al variare di k .
 (B) (4 punti) Si trovino basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^5$ e $\mathbb{R}^4$ tali che

$$[f_{-2}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{con } r = \text{rank}(f_{-2}).$$

Sia ora $V_k = \{g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^5) : f_k \circ g = \text{Id}_{\mathbb{R}^4}\}$.

- (C) (3 punti) Si dica per quali k si ha che V_k è non vuoto.
 (D) (2 punti) Si dimostri che V_k quando è non vuoto è un sottospazio affine di $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^5)$ e se ne calcoli la dimensione.

2. Per $k \in \mathbb{C}$ sia

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & -k & k & 0 \\ k & 2 & 0 & k \\ 0 & 0 & k & -2 \\ 0 & 0 & 2 & k \end{pmatrix}.$$

- (A) (3 punti) Si trovino gli autovalori complessi di A_k al variare di k in $\mathbb{C}$.
 (B) (6 punti) Si dica per quali $k \in \mathbb{C}$ la matrice A_k si diagonalizza su $\mathbb{C}$, e per quali $k \in \mathbb{R}$ si diagonalizza su $\mathbb{R}$.
 (C) (3 punti) Si trovi una base di autovettori in $\mathbb{C}^4$ per A_1 .



Risposte esatte

5. ♥

1. No: V ha dimensione al più 4, dunque non 5

2. No: se X ha dimensione 2 allora Y e Z hanno dimensione 1 dunque $Y \cap Z \neq \{0\}$; se X ha dimensione 1 e allora Y e Z hanno dimensione 2 e allora $Y + Z \neq \mathbb{R}^3$

3. $1/5$

4. $5(3 - i)$

5. $(6, -1), (1, -1)$

6. $\begin{pmatrix} 12 & 10 & -7 \\ -21 & -17 & 12 \end{pmatrix}$

7. $(1 - t, 3 - 4t, 2 + 3t)$

1. ♥ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♦ 5. ♥ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♦ 9. ♣ 10. ♥