UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 07/02/06 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Se $v_1, \ldots, v_6$ sono distinti e $V = \operatorname{Span}(v_1, \ldots, v_6)$, può (v_1, v_2, v_4, v_6) essere una base di V? Fare un esempio o spiegare perché non è possibile.

2. Possono esistere sottospazî non banali X, Y, Z di $\mathbb{R}^4$ tali che $X \oplus Y = X \oplus Z = Y \oplus Z = \mathbb{R}^4$? Esibirli oppure spiegare perché non possono esistere.

3. Determinare il coseno dell'angolo formato dai vettori $e_1 + 2e_3 + 2\sqrt{5}e_4$, $3e_1 + \sqrt{26}e_2 + e_3$ di $\mathbb{R}^4$.

4. Calcolare $\det \begin{pmatrix} -2 & i & 1-i \\ 3 & 1+i & -i \\ i & 1+2i & -1 \end{pmatrix}$.

5. Trovare una base che diagonalizzi $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

6. Siano $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ data da $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_3, x_2 - 2x_3)$, $\mathcal{B} = (e_1 + e_2, 2e_1 + e_3, e_2 - 2e_3)$ e $\mathcal{C} = (e_1 + 2e_2, 2e_1 + 3e_2)$. Trovare $[f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$.

7. Risolvere il sistema $x - 2y + 3z = 9,\ 2x - y + 2z = 8,\ x - 5y + 7z = 19$.

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 07/02/06 — Esercizî

1. Per $k \in \mathbb{R}$ sia $f_k : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ data da $f_k(x) = A_k \cdot x$, dove

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ k & 1 & k+1 & 1 & -1 \\ -k & k+1 & 1 & k+1 & -1 \\ k & 1 & k+1 & 1 & k-1 \end{pmatrix}.$$

(A) (3 punti) Si calcoli il rango di f_k al variare di k.

(B) (4 punti) Si trovino basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^5$ e $\mathbb{R}^4$ tali che

$$[f_{-2}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{con } r = \mathrm{rank}(f_{-2}).$$

Sia ora $V_k = \{g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^5) : \ f_k \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4}\}$.

(C) (3 punti) Si dica per quali k si ha che V_k è non vuoto.

(D) (2 punti) Si dimostri che V_k quando è non vuoto è un sottospazio affine di $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^5)$ e se ne calcoli la dimensione.

2. Per $k \in \mathbb{C}$ sia

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & -k & k & 0 \\ k & 2 & 0 & k \\ 0 & 0 & k & -2 \\ 0 & 0 & 2 & k \end{pmatrix}.$$

(A) (3 punti) Si trovino gli autovalori complessi di A_k al variare di k in $\mathbb{C}$.

(B) (6 punti) Si dica per quali $k \in \mathbb{C}$ la matrice A_k si diagonalizza su $\mathbb{C}$, e per quali $k \in \mathbb{R}$ si diagonalizza su $\mathbb{R}$.

(C) (3 punti) Si trovi una base di autovettori in $\mathbb{C}^4$ per A_1.

Risposte esatte

5. $\diamondsuit$

1. Sì: $V = \mathbb{R}^4$, $(v_j)_{j=1}^6 = (e_1, e_2, e_1 + e_2, e_3, 0, e_4)$

2. Sì: $X = \text{Span}(e_1, e_2)$, $Y = \text{Span}(e_3, e_4)$, $Z = \text{Span}(e_1 + e_3, e_2 + e_4)$

3. $1/6$

4. $5(3 + i)$

5. $(1, -2), (1, -1)$

6. $\begin{pmatrix} -4 & -13 & 4 \\ 3 & 8 & -1 \end{pmatrix}$

7. $(1 - t, 2 + 4t, 4 + 3t)$

1. $\heartsuit$ 2. $\clubsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\diamondsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\spadesuit$ 8. $\diamondsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\heartsuit$