



 Matematica III — Scritto del 19/2/05 — Quesiti

Nome _____ Cognome _____ Matricola _____

1. Sia $(y_n)_{n=0}^\infty \subset [-1, 1]$ una successione di punti distinti, e sia $g_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione che vale 1 in y_n ed è nulla altrove. Qual è il limite puntuale della $(f_n)_{n=0}^\infty$? Tale limite è uniforme?

2. Trovare l'armonica coniugata di $u(x, y) = e^{-x}((x^2 - y^2) \cos(y) + 2xy \sin(y))$.

3. Sia $\ell = \{-it : t \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$ e sia $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \ell)$. Quanto risulta il raggio di convergenza dello sviluppo di f in serie di Taylor centrato in $1 - i$?

4. Calcolare $\int_{\partial\Delta(1,2)} \frac{z^2 dz}{(z-i)(z+2)}$.

5. Sia $f = \chi_{(-1,1]}$. Per quali $t \in [-\pi, \pi]$ si ha che $S_N(f)(t)$ converge a $f(t)$? Su quali intervalli chiusi contenuti in $[-\pi, \pi]$ la convergenza è uniforme?

6. Sia $A = \mathcal{F}(f)$, $h(t) = f(t)^2$ e $B = \mathcal{F}(h)$. Che legame c'è tra B e A ?

7. Siano $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq x^2, 0 \leq x \leq 1\}$ e $v(x, y, z) = (\sin(yz), -yz, \frac{1}{2}z^2)$. Calcolare $\int_{\partial\Omega} \langle v | n \rangle$ dove n è la normale a $\partial\Omega$ esterna a Ω .

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

 1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♠ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♠ 9. ♣ 10. ♡



1. Sia $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 + z^2 = 1, |y| \leq 1\}$. Si considerino la 2-forma su \mathbb{R}^3

$$\omega = (z - 2y)dx dy + 2y dx dz + x dy dz$$

e, per ogni a in \mathbb{R} , la 1-forma

$$\varphi_a = y((y + az)dx + x dz).$$

- (A) (2 punti) Si dimostri che Σ è una superficie con bordo.
 (B) (3 punti) Si determini una parametrizzazione di Σ .
 (C) (2 punti) Si dimostri che ω è chiusa.
 (D) (2 punti) Si determini l'unico valore $a_0 \in \mathbb{R}$ tale che si abbia $\omega = d\varphi_{a_0}$.
 (E) (3 punti) Si calcoli $\int_{\Sigma} \omega$, con Σ orientata secondo la parametrizzazione data al punto (B).

2. Sia k un numero reale positivo e si consideri il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{t^3 x(t)}{1+t^2 x(t)}, \\ x(0) = k. \end{cases}$$

Sia $x_k : (a_k, b_k) \rightarrow \mathbb{R}$ la soluzione massimale di tale problema, con $a_k \in [-\infty, 0)$ e $b_k \in (0, +\infty]$.

- (A) (2 punti) Si dimostri che x_k è positiva e crescente su $[0, b_k)$ e che $x_k(t) = x_k(-t)$ laddove tale uguaglianza ha senso. Se ne deduca che $a_k = -b_k$.
 (B) (2 punti) Si dimostri che $a_k = -\infty$ e $b_k = +\infty$, ossia che x_k è definita su tutto \mathbb{R} .
 (C) (3 punti) Si dimostri che $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_k(t) = +\infty$.
 (D) (2 punti) Si calcoli $\lim_{t \rightarrow +\infty} x'_k(t)/t$.
 (E) (3 punti) Si dimostri che $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_k(t)/t^2 = 1/2$.



Risposte esatte

5. ♥

1. Il limite puntuale è la funzione nulla, e non è uniforme.
2. $v(x, y) = e^{-x}(- (x^2 - y^2) \sin(y) + 2xy \cos(y))$
3. Almeno 1.
4. $-2\pi(1 + 2i)/5$.
5. Convergenza puntuale per $t \neq -1, 1$. Convergenza uniforme su $[a, b]$ per $-\pi \leq a < b < -1$, per $-1 < a < b < 1$ e per $1 < a < b \leq \pi$
6. $B = \frac{1}{2\pi}A * A$.
7. 0.

1. ♥ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♦ 5. ♥ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♦ 9. ♣ 10. ♥
