UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica III — Scritto del 4/6/05 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Intorno a quali punti non si applica il teorema di invertibilità locale per la funzione $f(x, y) = (3x^2y, xy^2 + 2x^2)$?

2. Provare che l'insieme delle soluzioni dell'equazione alle differenze $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}^2$ non è uno spazio vettoriale.

3. Sia $f(t) = t^2 + t$. Calcolare il coefficiente di Fourier $\alpha_2(f)$.

4. La serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}} \sin(nx)$ è derivabile termine a termine? Perché?

5. Sia $g(t) = f'(t + 2)$. Che relazione c'è tra le trasformate di Fourier $\mathcal{F}(g)$ e $\mathcal{F}(f)$?

6. Risolvere il problema $x''' = 3x' + 2x,\ x(0) = 1,\ x'(0) = 1, x''(0) = 6$.

7. Provare che la soluzione del problema di Cauchy $x' = (x - 2t)\sin(x),\ x(0) = 1$ è definita su $[0, +\infty)$ e calcolare $\lim_{t\to+\infty} x(t)$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♣ 3. ♡ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♡ 7. ♣ 8. ♢ 9. ♢ 10. ♡

Matematica III — Scritto del 4/6/05 — Esercizî

1. Al variare di $r > 0$, si considerino gli insiemi

$$\begin{aligned} S_r &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = r^2,\ |z| \leqslant 1\} \\ D_r^\epsilon &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leqslant r^2 + 1,\ z = \epsilon\}, \qquad \epsilon = \pm 1. \end{aligned}$$

Sia Ω_r l'aperto limitato il cui bordo è dato da $S_r \cup D_r^{+1} \cup D_r^{-1}$, e siano S_r, D_r^{+1}, D_r^{-1} orientati dalla normale uscente da Ω_r. Sia infine $\omega = x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

(A) (2 punti) Si dimostri che S_r è una superficie con bordo e se ne trovi una parametrizzazione.

(B) (3 punti) Si esprima l'area di S_r come un integrale semplice.

(C) (2 punti) Si calcolino gli integrali di ω su S_r, D_r^{+1} e D_r^{-1}.

(D) (2 punti) Si calcoli il volume di Ω_r.

(E) (3 punti) Si calcolino $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{\mathrm{Area}(S_r)}{4\pi\sqrt{1+r^2}}$ e $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{\mathrm{Vol}(\Omega_r)}{2\pi(1+r^2)}$ e si dia una giustificazione dei risultati.

2. Sia f la funzione meromorfa definita da $f(z) = 1/(z^2 \sin z)$. Per ogni $N \geqslant 1$ siano inoltre $\gamma_N^1, \gamma_N^3 : [-N, N] \to \mathbb{C}$ e $\gamma_N^2, \gamma_N^4 : [-N - 1/2, N + 1/2] \to \mathbb{C}$ i cammini così definiti:

$$\gamma_N^1(t) = (N + 1/2 + it)\pi,\ \gamma_N^2(t) = (-t + iN)\pi,\ \gamma_N^3(t) = (-N - 1/2 - it)\pi,\ \gamma_N^4(t) = (t - iN)\pi.$$

(A) (2 punti) Si determinino i poli di f e se ne calcolino gli ordini relativi. (Si ricordi che $\sin(x+iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$).

(B) (3 punti) Si calcolino i residui di f nei suoi poli (per il calcolo del residuo in 0 può risultare utile lo sviluppo di Laurent $1/\sin z = z^{-1} + 0 + (1/6)z + \ldots$).

(C) (2 punti) Si provi che $|\sin((n+1/2)\pi + is)| \geqslant 1$, $|\sin(s + in\pi)| \geqslant \sinh(n\pi)$ per $s \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

(D) (2 punti) Usando (C), si provi che $\lim\limits_{N\to\infty} \left(\int\limits_{\gamma_N^1} f(z)\mathrm{d}z + \int\limits_{\gamma_N^2} f(z)\mathrm{d}z + \int\limits_{\gamma_N^3} f(z)\mathrm{d}z + \int\limits_{\gamma_N^4} f(z)\mathrm{d}z \right) = 0.$

(E) (3 punti) Si sfruttino (B) e (D) per calcolare $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica III — Scritto del 4/6/05 — Quesiti

Risposte esatte

4. ♣

1. Lungo la retta $x = 0$ e la parabola $4x = 3y^2$.

2. Sia a la soluzione con $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$ e sia $b = 2a$. Allora $b_2 = 2 \neq 4 = b_0 + b_1^2$, dunque b non è soluzione.

3. $(1 + i)/2$.

4. No, perché la serie delle derivate non converge per $x = 0$.

5. $\mathcal{F}(g)(x) = ix\,\mathrm{e}^{2ix}\mathcal{F}(f)(x)$.

6. $\mathrm{e}^{2t} - t\,\mathrm{e}^{-t}$.

7. 0.

1. ♠ 2. ♣ 3. ♡ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♡ 7. ♣ 8. ♢ 9. ♢ 10. ♡