UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 29/1/05 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Trovare una base di $\mathrm{Span}(e_1 - e_2 + e_3, e_2 - e_1 - e_3, e_1 + e_2 + e_4, 2e_1 + e_3 + e_4, e_2 + e_3 + e_4) \subset \mathbb{R}^4$.

2. Se $V = \mathrm{Span}(e_1 + 2e_2, e_1 + ie_3, e_4 + ie_5) \subset \mathbb{C}^5$ e $V + W = \mathbb{C}^5$, che dimensione può avere W?

3. Se le righe di una matrice A sono linearmente indipendenti, un sistema lineare del tipo $Ax = b$ ha sempre soluzione?

4. Calcolare $\det \begin{pmatrix} 0 & -i & -1 \\ 1 & 0 & 1+i \\ i & 1-i & 0 \end{pmatrix}$.

5. Sia $V = \mathbb{R}_{\leqslant 1}[x]$. Determinare gli autovalori di $f : V \to V$ data da $f(p(x)) = 2\int_0^1 p(t)\,\mathrm{d}t + p(2)\cdot x$.

6. Siano $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ data da $f(z) = {}^{\mathrm{t}}(iz_1 + z_2, z_1 + iz_2)$ e $\mathcal{B} = (-e_2, e_1 + ie_2)$. Trovare $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$.

7. Trovare un vettore di $\mathbb{C}^2$ con seconda coordinata reale positiva e ortogonale a $(1-i)e_1 + (2+i)e_2$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ◇ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♠ 8. ◇ 9. ♣ 10. ♡

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 29/1/05 — Esercizî

1. Al variare di t in $\mathbb{R}$ si considerino i seguenti sottospazî affini di $\mathbb{C}^3$:

$$\begin{aligned} E_t &= \{x \in \mathbb{C}^3 \,:\, 2tx_1 - (t+2)x_2 = t\}, \\ F_t &= \{x \in \mathbb{C}^3 \,:\, (2t-i)x_2 + (2-6i)tx_3 = 2-6i\}. \end{aligned}$$

Siano V_t e W_t i sottospazî vettoriali associati rispettivamente a E_t e F_t

(A) (2 punti) Si dimostri che per ogni elemento ${}^t(x_1, x_2, x_3)$ di E_t, anche il coniugato ${}^t(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)$ appartiene ad E_t.

(B) (2 punti) Si trovi un valore t_0 tale che W_{t_0} contenga un vettore non nullo ortogonale a V_{t_0} (rispetto al prodotto scalare hermitiano canonico di $\mathbb{C}^3$).

(C) (3 punti) Si provi che esiste una base ortonormale (v_1, v_2, v_3) di $\mathbb{C}^3$ tale che (v_1, v_2) sia una base di V_{t_0} e (v_2, v_3) sia una base di W_{t_0}.

(D) (3 punti) Per ogni t in $\mathbb{R}$ si trovi un piano affine G_t che contenga $E_t \cap F_t$ e il punto ${}^t(t, 2t, -t)$.

(E) (2 punti) Si dica se $F_t \cap \mathbb{R}^3$ sia un sottospazio affine di $\mathbb{R}^3$ e, in tal caso, se ne trovi la dimensione al variare di t.

2. Al variare di t in $\mathbb{R}$ si considerino la matrice $A_t = \begin{pmatrix} t+9 & 0 & 0 \\ 2 & t+5 & 5 \\ -2 & 4 & t+4 \end{pmatrix}$ e l'applicazione lineare $f_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ad essa associata.

(A) (2 punti) Si trovino i valori di t per cui la matrice A_t non è invertibile.

(B) (3 punti) Si trovino gli autovalori di A_t e le loro molteplicità algebriche.

(C) (2 punti) Si trovino i valori di t per i quali esiste $x_t \in \mathbb{R}^3$ non nullo tale che $f_t(x_t) = -2tx_t$.

(D) (3 punti) Si provi che $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e si determini $[f_t]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

(E) (2 punti) Si trovino i valori di t per cui la matrice A_t è diagonalizzabile (sul campo reale).

Risposte esatte

5. ♡

1. Primo, terzo e ultimo vettore

2. Tra 2 e 5.

3. Sì.

4. $2i$.

5. $3, 1$.

6. $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 2i \end{pmatrix}$.

7. $(3i - 1, 2)$.

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡