UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 27/6/05 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Trovare una base di $\left\{ p(x) \in \mathbb{R}_{\leqslant 3}[x] : \int_0^1 p(t)\,\mathrm{d}t = 2p'(0) \right\}$.

2. Sia $X = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 2x_2 = x_2 + 3x_3 = x_3 + 4x_4\}$. Esibire Y tale che $X \oplus Y = \mathbb{R}^4$.

3. Esibire un sistema lineare non omogeneo di due equazioni in tre incognite privo di soluzioni.

4. Se $A \in \mathcal{M}_{4\times 5}(\mathbb{R})$ ha rango 3, può avere una sola sottomatrice 2×2 invertibile? Spiegare.

5. Trovare una base che diagonalizzi $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

6. Trovare una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^2$ tale che $[e_1 + e_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $[e_1 - e_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

7. Applicare il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt alla base $(e_1 + ie_2, e_2)$ di $\mathbb{C}^2$.

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 27/6/05 — Esercizî

1. Si considerino gli insiemi $V = \{x \in \mathbb{C}^3 : \ x_1 = \overline{x_2}\}$, e $W = \{x \in \mathbb{C}^3 : \ 3ix_1 + 2ix_2 - x_3 = 2 - 2i\}$. Si consideri inoltre l'applicazione $f : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \Re(x_1)\Re(y_1) + \Im(x_2)\Im(y_2) + \Re(x_3)\Re(y_3) + \Im(x_3)\Im(y_3)$$

(A) (2 punti) Provare che V non è un sottospazio vettoriale complesso di $\mathbb{C}^3$.

(B) (2 punti) Mostrare che V è un sottospazio vettoriale reale e calcolarne la dimensione.

(C) (3 punti) Calcolare la dimensione, come spazî affini reali, di $V \cap W$ e di $V + W$.

(D) (2 punti) Mostrare che f è un prodotto scalare su V visto come spazio vettoriale reale.

(E) (3 punti) Trovare una base ortonormale rispetto al prodotto scalare f dello spazio vettoriale associato a $V \cap W$.

2. Siano date le matrici $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -8 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ e $N = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 14 & 11 & -18 \\ 9 & 6 & -10 \end{pmatrix}$ e sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata a N.

(A) (3 punti) Trovare una rappresentazione parametrica del nucleo di M ed una cartesiana della sua immagine.

(B) (3 punti) Verificare che M è diagonalizzabile in senso reale, e trovare una base di autovettori $\mathcal{B}$.

(C) (3 punti) Trovare $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$.

(D) (2 punti) Verificare che N non è diagonalizzabile.

(E) (1 punti) Dire se esiste una base rispetto alla quale la matrice di f è simmetrica.

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 27/6/05 — Quesiti

Risposte esatte

5. ♢

1. $3+2x, 2x+9x^2, x+6x^3$.

2. $\mathrm{Span}(e_1, e_2)$.

3. $\begin{cases} x+y+z &= 0 \\ x+y+z &= 1 \end{cases}$.

4. No: ci sono tre colonne v_1, v_2, v_3 linearmente indipendenti e sia (v_1, v_2) che (v_1, v_3) hanno sottomatrici 2×2 invertibili.

5. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

6. $e_1 - \frac{1}{3}e_2, \frac{2}{3}e_2$.

7. $\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + ie_2), \frac{1}{\sqrt{2}}(ie_1 + e_2)$.

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡