Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 19/2/05 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Se (v_1, v_2, v_3) è una base di $\mathbb{C}^3$, lo è anche $(iv_1 + v_2, v_1 + iv_3, v_2 - v_3)$?

2. Sia $f : \mathbb{R}_{\leqslant 4}[x] \to \mathbb{R}^6$ lineare tale che $f(x^2 + x^4) = 0$. Che dimensione può avere $\mathrm{Im}(f)$?

3. Risolvere il sistema $\begin{cases} 2x + y - z = -1 \\ x + 2y - z = -3 \\ x + y + 3z = 6. \end{cases}$

4. Per quali $k \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x, y) = {}^{\mathrm{t}}x \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2k^2 \\ -2k & 1 \end{pmatrix} \cdot y$ definisce un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$?

5. Trovare il punto di $\mathrm{Span}(e_1 - 3e_3, -e_1 + 7e_2 + 3e_3) \subset \mathbb{R}^3$ avente minima distanza da $10e_1 + e_2$.

6. Calcolare rank $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Siano $V = \mathrm{Span}(e_1 + e_2 - e_4, e_2 + e_5, e_1 - e_4 - e_5)$ e $W = \mathrm{Span}(e_1 + e_2, e_2 - e_4, e_5) \subset \mathbb{R}^5$. Trovare $\dim(V + W)$.

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 19/2/05 — Esercizî

1. Al variare di z in $\mathbb{C}$ si considerino le matrici

$$A_z = \begin{pmatrix} z-1 & 5-3z & z-2 & 2-z \\ 0 & 1-z & 0 & 0 \\ 0 & 2-2z & z-1 & 0 \\ 0 & 2-z & z-2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_z = (z-1)\mathrm{I}_4 - A_z, \quad C_z = (1-z)\mathrm{I}_4 - A_z.$$

(A) (4 punti) Al variare di z si calcoli il rango di ciascuna di esse.

(B) (4 punti) Si trovino tutti i valori di z per cui la matrice A_z è diagonalizzabile, provando in particolare che ciò accade per $z = 0$.

(C) (2 punti) Si scrivano le matrici di A_0, B_0, C_0 rispetto a una base in cui A_0 sia diagonale.

(D) (2 punti) Si dica per quali z esiste una base di autovettori di A_z i cui elementi abbiano tutte le coordinate reali.

2. Al variare di t in $\mathbb{R}$ siano

$$A_t = \begin{pmatrix} 2t+1 & 0 & 2t+1 \\ 1-3t & 2t & 1-t \\ 0 & 6+t & 6+t \end{pmatrix}, \quad p_t = \begin{pmatrix} 4t+2 \\ 2-4t \\ t+6 \end{pmatrix}, \quad q_t = \begin{pmatrix} 2 \\ 3t \\ t-1 \end{pmatrix}$$

(A) (2 punti) Per $t = 1$ si trovino una base di $\mathrm{Ker}(A_t)$ e una base di $\mathrm{Im}(A_t)$ tali che insieme i vettori delle due basi formino una base di $\mathbb{R}^3$.

(B) (3 punti) Sempre per $t = 1$, se $\mathcal{B}$ è la base di $\mathbb{R}^3$ del punto precedente, si trovino $[p_t]_{\mathcal{B}}$ e $[q_t]_{\mathcal{B}}$.

Si ponga ora:

$$E_t = \{x \in \mathbb{R}^3 : A_t x = p_t\}, \quad F_t = q_t + \mathrm{Im}(A_t).$$

(C) (2 punti) Si calcolino le dimensioni di E_t e F_t al variare di t.

(D) (3 punti) Si dica quando E_t e F_t sono paralleli e si trovino i valori di t per cui $E_t \cap F_t = \emptyset$.

(E) (2 punti) Si trovi la dimensione di $E_t \cap F_t$ e di $E_t + F_t$ al variare di t.

Risposte esatte

5. ♡

1. Sì

2. Tra 0 e 4.

3. $x = 1, y = -1, z = 2.$

4. $k = 0.$

5. $e_1 + e_2 - 3e_3.$

6. 3

7. 4.

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡