UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 16/7/05 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Completare $e_1 + e_2$ a una base di $\{x \in \mathbb{R}^4 : \ x_1 + x_3 = x_2 + x_4\}$.

2. Se $f : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}_{\leqslant 3}[x]$ è lineare e $x^2 \notin \mathrm{Im}(f)$, che dimensione può avere $\mathrm{Ker}(f)$?

3. Può un sistema omogeneo di 4 equazioni in 3 incognite avere infinite soluzioni? Spiegare.

4. Trovare la proiezione ortogonale di $e_1 + e_2 + e_3$ su $\{x \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$.

5. Esibire un vettore v di $\mathbb{C}^3$ unitario e ortogonale a $\mathrm{Span}(e_1 - 2ie_2, e_2 + ie_3)$.

6. Se $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ è lineare surgettiva e $M = [f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$ è una matrice che rappresenta f, la M deve avere sottomatrici 2×2 invertibili? Spiegare.

7. Se $X = \{x \in \mathbb{R}^5 : \ x_1 - x_2 + x_4 = x_2 + x_5 = x_1 + x_4 + x_5 = 0\}$ e $X + Y = \mathbb{R}^5$, che dimensione può avere Y?

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 16/7/05 — Esercizî

1. Sia $V = \{p(x) \in \mathbb{C}_{\leqslant 4}[x] : \ p(0) = p(1)\}$, e sia $f : V \to \mathbb{C}_{\leqslant 4}[x]$ la funzione:

$$p(x) \mapsto x(x-1)p''(x)$$

dove $p''(x)$ la derivata seconda del polinomio $p(x)$.

(A) (2 punti) Si dimostri che V un sottospazio vettoriale complesso, che f è una applicazione lineare e che $\mathrm{Im}(f) \subset V$.

(B) (3 punti) Si dimostri che $\mathcal{B} = (x^4 - x + 1, x^4 - x, x^4 - x^2, x^4 - x^3)$ è una base di V.

(C) (3 punti) Considerando f come applicazione da V in V, si scriva la sua matrice nella base $\mathcal{B}$.

(D) (2 punti) Si trovi una base di $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.

(E) (2 punti) Si dimostri che f è diagonalizzabile.

2. In $\mathbb{R}^3$ siano $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $E_t = \begin{pmatrix} 1 \\ t+1 \\ 2t+3 \end{pmatrix}$, dove t varia in $\mathbb{R}$. Sia H_t il più piccolo sottospazio affine di $\mathbb{R}^3$ che contenga i punti C e D e tale che lo spazio vettoriale associato contenga il vettore E_t.

(A) (3 punti) Per ogni t si calcoli la dimensione di H_t e lo si esprima in forma cartesiana e in forma parametrica.

(B) (2 punti) Si dimostri che $\mathcal{B} = (A, B, C)$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

Sia K l'immagine dell'applicazione lineare f definita da $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

(C) (2 punti) Si esprima K in forma parametrica.

(D) (3 punti) Per ogni t si trovi la dimensione di $H_t + K$ e di $H_t \cap K$.

(E) (2 punti) Si trovi una base (v_1, v_2, v_3) di $\mathbb{R}^3$ tale che $\mathrm{Span}(v_1)$ sia parallelo ad H_t e $\mathrm{Span}(v_2, v_3)$ sia parallelo a K.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Risposte esatte

5. $\diamondsuit$

1. $e_1 + e_4, e_2 + e_3$.

2. Tra 6 e 9.

3. Sì: $\begin{cases} x - y &= 0 \\ y - z &= 0 \\ 2x - y - z &= 0 \\ x + y - 2z &= 0 \end{cases}$.

4. $(2, 1, 4)/3$.

5. $(2, i, 1)/\sqrt{6}$.

6. Sì perché $\text{rank}(M) = 3 \geqslant 2$.

7. Tra 2 e 5.

1. $\heartsuit$ 2. $\clubsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\diamondsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\spadesuit$ 8. $\diamondsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\heartsuit$