Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 15/1/05 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Dati $u, v, w \in \mathbb{C}^4$ tali che ciascuna delle coppie (u, v), (u, w) e (v, w) è linearmente indipendente, si può concludere che (u, v, w) è linearmente indipendente?

2. Sia $\mathcal{B} = (e_3 - e_2, e_1 + 2e_2 - e_3, 2e_1 + 3e_2)$. Trovare $[e_2]_{\mathcal{B}}$.

3. Quante soluzioni può avere un sistema non omogeneo di 4 equazioni lineari in 6 incognite?

4. Sia $A \in \mathcal{M}_{8\times 6}(\mathbb{C})$. Se tutte le sottomatrici 4×4 di A hanno determinante nullo, si può concludere che $\mathrm{rank}(A) \leqslant 3$?

5. Trovare in $\mathbb{R}^3$ un vettore ortogonale $\mathrm{Span}(e_1 + e_2 + e_3, 3e_1 - 2e_2 - e_3)$ ed avente norma 42.

6. Se $f : \mathbb{C}_{\leqslant 7}[z] \to \{x \in \mathbb{C}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ è lineare, che dimensione può avere $\mathrm{Ker}(f)$?

7. Se $E, F \subset \mathbb{R}^6$ sono sottospazî affini non paralleli di dimensioni rispettivamente 1 e 2, che dimensione può avere $E + F$?

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 15/1/05 — Esercizî

1. Al variare di k in $\mathbb{R}$ sia $P_k = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} k+1 \\ -2k \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -k-1 \end{pmatrix} \right\}$ e sia R_k il sottospazio di equazioni $\begin{cases} (3-k)x + ky = 3 \\ -kx - kz = 4 \end{cases}$.

(A) (2 punti) Trovare tutti i k in $\mathbb{R}$ per cui P_k è un piano e tutti i k in $\mathbb{R}$ per cui R_k è una retta.

(B) (3 punti) Al variare di k in $\mathbb{R}$ esprimere P_k in forma cartesiana e R_k in forma parametrica.

(C) (3 punti) Al variare di k in $\mathbb{R}$ trovare la dimensione di $P_k \cap R_{k+1}$ e di $P_k + R_{k+1}$.

(D) (1 punto) Trovare tutti i k in $\mathbb{R}$ per cui esistono vettori non nulli ortogonali contemporaneamente agli spazi vettoriali associati a P_k e a R_{k+1}.

(E) (3 punti) Trovare tutti i k in $\mathbb{R}$ per cui lo spazio vettoriale associato a R_{k+1} sia ortogonale a quello associato a P_k

2. Al variare di α in $\mathbb{C}$ sia $A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha\overline{\alpha} & i(\alpha - \overline{\alpha}) & 0 \\ i\alpha & \alpha^2 + 1 & 0 \\ 0 & (\alpha^2 + \overline{\alpha}^2) & 2 \end{pmatrix}$ e sia $f_\alpha : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ l'applicazione lineare ad essa associata.

(A) (3 punti) Determinare gli autovalori di f_α.

(B) (3 punti) Trovare tutti gli α in $\mathbb{C}$ con modulo diverso da 1 tali che f_α sia diagonalizzabile.

(C) (2 punti) Trovare tutti gli α in $\mathbb{C}$ per cui esiste un vettore $v \in \mathbb{C}^3$ non nullo tale che $f_\alpha(v) = (\alpha^2 - \alpha^3\overline{\alpha} + 2)v$. Per uno di questi valori di α a scelta, trovare un tale vettore.

(D) (2 punti) Trovare tutti gli α in $\mathbb{C}$ tali che A_α sia una matrice reale.

(E) (2 punti) Per ogni α in $\mathbb{C}$ tale che A_α è una matrice reale, dire se esiste una base (v_1, v_2, v_3) di $\mathbb{R}^3$ tale che ogni v_i è un autovettore di A_α.

Risposte esatte

5. ♡

1. No.

2. $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Nessuna o infinite.

4. Sì

5. $\sqrt{42}(e_1 + 4e_2 - 5e_3)$.

6. Tra 6 e 8.

7. 3 oppure 4

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡