UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 12/09/05 — Quesiti

**Nome** ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

**1.** Se $v_1, \dots, v_n$ è una base di uno spazio vettoriale $V$, può esserlo anche $v_1 + v_2, v_2 + v_3, \dots, v_{n-1} + v_n$?

**2.** Se $V = \{x \in \mathbb{R}^5 : \; x_1 + 2x_3 - x_5 = x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0\}$ e $W \subset \mathbb{R}^5$ è un sottospazio tale che $V \cap W = \{0\}$ e $V + W \neq \mathbb{R}^5$, che dimensione può avere $W$?

**3.** Risolvere $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x + y - z = 7 \\ -x + 2y + 2z = 1. \end{cases}$

**4.** Calcolare $\det \begin{pmatrix} 1+i & 0 & 1-i \\ 2 & i & 2+i \\ 1+2i & 3i & -1+2i \end{pmatrix}$.

**5.** Calcolare autovalori e loro molteplicità geometrica per la matrice $\begin{pmatrix} 11 & -30 & 5 \\ 4 & -11 & 2 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix}$.

**6.** Se $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} = (e_1 + e_2, 2e_1 - e_2)$ e $\mathcal{C} = (e_2, e_1 - 2e_2)$, calcolare $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$.

**7.** Trovare $z \in \mathbb{C}^2$ ortogonale a $\begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix}$ con $\|z\| = 1$ e $z_2$ immaginaria pura.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 12/09/05 — Esercizî

**1.** Siano $V = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ e $\langle\cdot|\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ l'applicazione definita da $\langle A|B\rangle = \mathrm{tr}(AB^*)$.

(A) (2 punti) Si dimostri che $\langle\cdot|\cdot\rangle$ è un prodotto scalare hermitiano su $V$.

(B) (2 punti) Si dimostri che i punti

$$\mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2-2i \\ 2i & 1 \end{pmatrix}$$

giacciono su uno stesso sottospazio affine bidimensionale $P$ di $V$.

(C) (2 punti) Si esibiscano uno spazio vettoriale $W$ su $\mathbb{C}$ ed un'applicazione lineare $f : V \to W$ tale che $\mathrm{Ker}(f)$ sia il sottospazio vettoriale associato a $P$.

(D) (3 punti) Si trovi una base ortonormale rispetto a $\langle\cdot|\cdot\rangle$ del sottospazio vettoriale associato a $P$.

(E) (3 punti) Sia $Q$ il sottospazio affine di $V$ che contiene $\mathrm{I}_2$ ed ha come sottospazio vettoriale associato l'ortogonale rispetto a $\langle\cdot|\cdot\rangle$ a quello associato a $P$. Si esprima $Q$ in forma parametrica.

**2.** Siano $A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 \\ -5 & 5 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $V = \{v \in \mathbb{R}^3 :\ 2x - y + z = 0\}$.

(A) (1 punti) Si dimostri che se $v \in V$ allora $Av \in V$.

Si indichi d'ora in poi con $f : V \to V$ l'applicazione lineare che manda $v$ in $Av$.

(B) (1 punto) Si trovi l'immagine di $f$.

(C) (2 punti) Si dica se $f$ è invertibile e, in caso contrario, se ne calcoli il rango.

(D) (3 punti) Si esprima $\mathrm{Ker}(f)$ in forma parametrica.

(E) (3 punti) Si trovino una base di $V$ e la matrice di $f$ rispetto ad essa.

(F) (2 punti) Si dica se $f$ sia diagonalizzabile.

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 12/09/05 — Quesiti

# Risposte esatte

## 5. ♢

**1.** No, ha un vettore in meno

**2.** 0 o 1

**3.** $x = 1, y = 3, z = -2$

**4.** $15 - 3i$

**5.** 1 e $-1$ entrambi con molteplicità geometrica 1

**6.** $\begin{pmatrix} -1 & 10 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$

**7.** $(1, i)/\sqrt{2}$

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡