



Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 4/6/05 — Quesiti

Nome _____ Cognome _____ Matricola _____

1. Esibire vettori non nulli e distinti $w_1, w_2, w_3, w_4 \in \mathbb{C}^2$ che generino $\mathbb{C}^2$ e tali che (w_1, w_2) e (w_3, w_4) non siano basi di $\mathbb{C}^2$.

2. Siano $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+2y \\ -x+y \end{pmatrix}$ e $\mathcal{B} = (e_1 + e_2, e_1 - 2e_2)$. Trovare $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

3. Risolvere $\begin{cases} x - y + 2z &= 5 \\ x + y - z &= -2 \\ 2x + y + 3z &= 3 \end{cases}$.

4. Calcolare $\det \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -i & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Esibire il vettore di $\mathbb{C}^2$ ortogonale a $(2 - i, 1 + 3i)$ e avente somma delle coordinate 1.

6. Provare che l'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x, y) = x \cdot y$ non è lineare.

7. Trovare equazioni cartesiane per $2e_3 + \text{Span}(e_1 - e_2, e_1 + 2e_4) \subset \mathbb{R}^4$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♥ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♦ 5. ♥ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♦ 9. ♣ 10. ♥



1. Per $t \in \mathbb{R}$ siano $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C_t = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ t \end{pmatrix}$, visti come sottospazi affini di dimensione 0 di $\mathbb{R}^3$. Siano $E = A + B$, $F_t = B + C_t$, $G_t = A + B + C_t$ (somma di sottospazi affini). Sia V l'ortogonale al sottospazio vettoriale associato ad E .

- (A) (2 punti) Esprimere G_t in forma cartesiana ed in forma parametrica.
- (B) (3 punti) Dire se esistono valori di t per cui i sottospazi vettoriali associati ad E ed a F_t sono ortogonali tra loro.
- (C) (2 punti) Esprimere V in forma parametrica.
- (D) (2 punti) Calcolare la dimensione di $G_t \cap V$ e di $G_t + V$.
- (E) (3 punti) Trovare una base ortonormale dello spazio vettoriale associato a $G_t + V$ il cui primo elemento stia in V .

2. Per $z \in \mathbb{C}$ sia $A_z = \begin{pmatrix} 0 & z & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 8 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- (A) (3 punti) Trovare tutti i valori di z per cui A_z non è diagonalizzabile.
- (B) (2 punti) Trovare tutti gli autovettori di A_0 .
- (C) (2 punti) Trovare un autovettore reale di A_1 .
- (D) (2 punti) Dire se esista una matrice B invertibile tale che $B^{-1} \cdot A_1 \cdot B = A_{-1}$.
- (E) (3 punti) Trovare i valori di z per cui A_z ha un autovalore reale.



Risposte esatte

5. ♥

1. $e_1, -e_1, e_2, -e_2$.

2. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. $x = 1, y = -2, z = 1$.

4. $2 - 6i$.

5. $\left(\frac{11+7i}{17}, \frac{6-7i}{17}\right)$.

6. $f(1, 1) = 1 \neq 0 = f(1, 0) + f(0, 1)$.

7. $x_3 = 2, x_4 = 2x_1 + 2x_2$.

1. ♥ 2. ♣ 3. ♠ 4. ◇ 5. ♥ 6. ♠ 7. ♠ 8. ◇ 9. ♣ 10. ♥
