UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 29/05/04 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Esibire oppure dimostrare che non esistono vettori $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^3$ tali che (v_1, v_2, v_3), (v_1, v_2, v_4), (v_1, v_3, v_4), (v_2, v_3, v_4) siano tutte basi di $\mathbb{R}^3$.

2. Siano $\mathcal{B} = (e_1 + e_2, e_1 + ie_2)$ e $\mathcal{C} = (e_1 - e_2, e_1 - ie_2)$. Trovare $[\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^2}]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$.

3. Siano $f, g : \mathbb{R}^{17} \to \mathbb{R}$ lineari tali che $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g)$ e $f(e_1) = 2$. Provare che esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $g(x) = \lambda f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^{17}$.

4. Che rango può avere $A \in \mathcal{M}_{5\times 5}(\mathbb{R})$ con la sottomatrice delle prime tre righe e colonne di rango 2?

5. Trovare una base del piano in $\mathbb{R}^3$ ortogonale alla retta di equazioni $2x - y + z = 0$ e $x + y - 2z = 0$.

6. Quante soluzioni può avere un sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 7 incognite?

7. Sia $P = \mathrm{Span}(e_1 - e_2 + e_3, 2e_1 + e_2 + e_3)$. Trovare una equazione cartesiana per il piano parallelo a P e passante per $e_1 + 2e_2 - e_3$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡

1. Per ogni $h \in \mathbb{R}$ siano V_h e W_h i sottospazî affini di $\mathbb{R}^3$ così definiti:

$$\begin{aligned} V_h &= \{ {}^{t}(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 + hx_3 = -1 - 2h^2, \ x_2 = 0 \}, \\ W_h &= \{ {}^{t}(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \ 2x_1 - hx_2 + hx_3 = -h^2, \ x_1 - hx_2 = 0 \}. \end{aligned}$$

Si fissi inoltre su $\mathbb{R}^3$ il prodotto scalare standard.

(A) (2 punti) Si calcolino le dimensioni di V_h e di W_h al variare di h in $\mathbb{R}$.

(B) (2 punti) Si determinino equazioni parametriche per V_h e W_h al variare di h in $\mathbb{R}$.

(C) (4 punti) Per ogni $h \in \mathbb{R}$ si determinino due vettori $v_h \in V_h$ e $w_h \in W_h$ tali che $v_h - w_h$ sia perpendicolare sia a V_h sia a W_h.

(D) (4 punti) Si dimostri che la distanza tra V_h e W_h è uguale alla lunghezza del vettore $v_h - w_h$, ossia che per ogni $h \in \mathbb{R}$ si ha:

$$\|v_h - w_h\| = \min \{ \|x - y\| : \ x \in V_h, \ y \in W_h \}.$$

2. Per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ si considerino la matrice

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ \lambda + i\lambda & -i\lambda & -\lambda \\ -2 - 2i\lambda & 1 - \lambda + i(1+\lambda) & 1 + \lambda + i\lambda \end{pmatrix}$$

e l'applicazione lineare $f_\lambda : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ data da $f_\lambda(z) = A_\lambda \cdot z$ per ogni $z \in \mathbb{C}^3$.

(A) (2 punti) Si determini un vettore non nullo $z_1 \in \mathbb{C}^3$ tale che $f_\lambda(z_1) = iz_1$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$. (Suggerimento: se vale per ogni λ vale per un valore di λ specifico).

(B) (2 punti) Si determini un vettore non nullo $z_2 \in \mathbb{C}^3$ tale che $f_\lambda(z_2) = \lambda z_2$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$.

(C) (4 punti) Si dimostri che $\mathcal{B} = (z_1, z_2, {}^{t}(0,0,1))$ è una base di $\mathbb{C}^3$ e si determini $[f_\lambda]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$.

(D) (4 punti) Si determinino i valori di λ per cui f_λ sia diagonalizzabile.

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 29/05/04 — Quesiti

Risposte esatte

5. ♢

1. $e_1, e_2, e_3, e_1 + e_2 + e_3$

2. $\begin{pmatrix} -i & 1-i \\ 1+i & i \end{pmatrix}$

3. Sia $v_2, \ldots, v_{17}$ una base di $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g)$ e $\lambda = g(e_1)/2$. Allora λf e g coincidono su $e_1, v_2, \ldots, v_{17}$, che è base

4. Tra 2 e 5. Per 5 usare $(e_1, e_2, e_4, e_3, e_5)$

5. $5e_1 - e_2, 3e_1 - e_3$

6. Sempre infinite

7. $2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3$

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡