Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 26/01/04 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Se $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^7$ sono linearmente indipendenti, lo sono anche $v_1 - v_2, v_1, v_3 - v_4, v_3$?

2. $W = \{x \in \mathbb{R}^5 : \; x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0\}$, $V = \mathrm{Span}(e_1 + e_3, 3e_3 + e_4, 3e_1 - e_4)$, $W = V + U$. Che dimensione può avere U?

3. Risolvere $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y - 2z = -6 \\ -x + 2y + z = 6 \end{cases}$.

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & i & 2 \\ i & 1 & 1+i \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix}$. Trovare $(A^{-1})_{32}$.

5. Se $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, $Ae_2 = e_3$, $Ae_3 = e_2$, $\det(A) = 0$, si conclude che A è diagonalizzabile?

6. $\mathcal{B} = (e_1 + ie_2, ie_1 + e_2)$. Trovare $[(-1+2i)e_1 + ie_2]_{\mathcal{B}}$.

7. I vettori $(1, i, 1)/\sqrt{3}$, $(1+i, -1, -1)/2$ si possono completare a una base ortonormale di $\mathbb{C}^3$?

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡

1. Per ogni $k \in \mathbb{C}$ sia $B_k = \begin{pmatrix} 2 & 0 & i\overline{k} \\ 0 & -ik & -5i \\ k^2+12 & 5i & 13 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ e sia $g_k : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ data da $g_k(v,w) = {}^{\mathrm{t}}\overline{v} \cdot B_k \cdot w$ per $v, w \in \mathbb{C}^3$.

(A) (3 punti) Si determini l'unico $k_0 \in \mathbb{C}$ per cui g_{k_0} sia un prodotto scalare hermitiano su $\mathbb{C}^3$.

Sia $V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} i \\ 2 \\ -i \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} :\ t_1, t_2 \in \mathbb{C} \right\}$ e per ogni $s \in \mathbb{C}$ sia $r_s = \left\{ t \begin{pmatrix} 3i \\ 3 \\ s \end{pmatrix} :\ t \in \mathbb{C} \right\}$.

(B) (2 punti) Si determini l'unico $s_0 \in \mathbb{C}$ per cui r_{s_0} sia ortogonale a V rispetto al prodotto g_{k_0}.

(C) (2 punti) Si determinino equazioni cartesiane per V.

(D) (2 punti) Si determini il punto $w \in \mathbb{C}^3$ di intersezione tra V e r_{s_0} e si dimostri che w è unitario rispetto a g_{k_0}.

(E) (3 punti) Si determini una base ortonormale per g_{k_0} il cui primo vettore sia w.

2. Per ogni $h \in \mathbb{R}$ si consideri l'applicazione lineare $f_h : \mathbb{R}_{\leqslant 2}[x] \to \mathbb{R}_{\leqslant 2}[x]$ definita da

$$f(p(x)) = p(0) \cdot (2 - 2x^2) + p'(0) \cdot (-2h - 2hx) + p(1) \cdot (-1 + h + 2hx + (1-h)x^2)$$

per ogni $p(x) \in \mathbb{R}_{\leqslant 2}[x]$. Sia inoltre $\mathcal{C} = (1, x, x^2)$ la base canonica di $\mathbb{R}_{\leqslant 2}[x]$.

(A) (2 punti) Si determini $[f_h]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$ al variare di h in $\mathbb{R}$.

(B) (2 punti) Si determini l'unico $h_0 \in \mathbb{R}$ per cui f_{h_0} sia non invertibile, e si determini una base di $\mathrm{Ker}(f_{h_0})$.

(C) (2 punti) Si determini $p_1(x) \in \mathbb{R}_{\leqslant 2}[x]$ non nullo tale che $f_h(p_1(x)) = 2p_1(x)$ per ogni $h \in \mathbb{R}$.

(D) (1 punto) Si scelga un polinomio non nullo di $\mathrm{Ker}(f_{h_0})$ e lo si denoti con $p_2(x)$. Si dimostri che per ogni $h \neq h_0$ la terna $\mathcal{B}_h = (p_1(x), p_2(x), f_h(p_2(x)))$ definisce una base di $\mathbb{R}_{\leqslant 2}[x]$.

(E) (2 punti) Per ogni $h \neq h_0$, si scriva $[f_h]_{\mathcal{B}_h}^{\mathcal{B}_h}$.

(F) (3 punti) Si determinino i valori reali di h per cui f_h sia diagonalizzabile.

Risposte esatte

5. ♡

1. Sì.

2. Tra 2 e 4

3. $x = -1,\ y = 1,\ z = 3$

4. $(1 - i)/2$

5. Sì

6. $(i, 1 + i)$

7. No

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡