UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 19/06/04 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Completare $e_1 + ie_2, ie_1 + e_2 - e_3$ a una base di $\mathbb{C}^3$.

2. Esibire oppure mostrare che non esistono sottospazî $V, W \subset \mathbb{R}^7$ tali che $\dim(V) = \dim(W) = 5$ e $\dim(V \cap W) = 2$.

3. Risolvere il sistema $x - iy - z = 1,\ x + y + iz = 1 - 2i,\ ix - y + z = -1 + 2i.$

4. Calcolare $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1+i \\ -2 & 0 & 1 \\ -i & 1-i & 0 \end{pmatrix}$.

5. Trovare una base che diagonalizzi $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Siano $\mathcal{B} = (e_2, 2e_1)$ e $\mathcal{C} = (e_1 + e_2, e_1 + 2e_2)$. Sia $v \in \mathbb{R}^2$ tale che $[v]_{\mathcal{B}} = (1, -1)$. Trovare $[v]_{\mathcal{C}}$.

7. Esibire un vettore di $\mathbb{C}^3$ unitario, ortogonale a $(1 - i, 1 + i, 2)$ ed avente terza coordinata reale positiva.

1. $\heartsuit$ 2. $\clubsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\diamondsuit$ 5. $\heartsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\spadesuit$ 8. $\diamondsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\heartsuit$

1. Sia W il sottospazio affine di $\mathbb{C}^4$ dato dalle soluzioni del seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} -iz_1 - z_2 - (1+i)z_3 = 1 \\ z_1 + (1-i)z_2 + 2z_3 - z_4 = -1 \\ (1+i)z_1 + z_2 + (1+i)z_3 - iz_4 = 0. \end{cases}$$

Per ogni $s \in \mathbb{C}$ sia poi $r_s = {}^t(1,0,s,0) + \lambda \cdot {}^t(2si, 1+s, 0, 2) : \lambda \in \mathbb{C}\}$. Si consideri inoltre fissato su $\mathbb{C}^4$ il prodotto hermitiano standard.

(A) (2 punti) Si calcoli la dimensione di W e se ne determinino equazioni parametriche.

(B) (2 punti) Si determini l'unico valore complesso s_0 per cui r_{s_0} sia parallelo a W.

(C) (3 punti) Si determini l'unico valore complesso s_1 per cui r_{s_1} intersechi W perpendicolarmente.

(D) (2 punti) Si dimostri r_0 è disgiunto da W e ad esso non parallelo

(E) (3 punti) Si calcoli la dimensione dello spazio affine generato da $W \cup r_s$ al variare di s in $\{0, s_0, s_1\}$.

2. Per ogni $k \in \mathbb{R}$ si considerino la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 2k & -k \\ 2k-1 & 1-k \end{pmatrix}$ e l'applicazione lineare $f_k : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definita da $f_k(M) = A_k \cdot M$. Sia inoltre $W = \{M \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : f_k(M) = kM \text{ per ogni } k \in \mathbb{R}\}$.

(A) (2 punti) Si determini una base di W.

Sia ora $Z = \text{Span}\left(W \cup \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

(B) (2 punti) Si dimostri che $f_k(Z) \subset Z$ per ogni $k \in \mathbb{R}$.

Per ogni $k \in \mathbb{R}$ sia ora $g_k : Z \to Z$ definita da $g_k(M) = f_k(M)$ per $M \in Z$.

(C) (3 punti) Si scelga una base $\mathcal{B}$ di Z e si determini $[g_k]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

(D) (1 punto) Si determinino i valori di k per cui g_k sia invertibile.

(E) (4 punti) Si determinino i valori di k per cui g_k sia diagonalizzabile.

Risposte esatte

5. ♡

1. Aggiungere e_1

2. $5+5-7>2$: non esistono

3. $1, -i, -1$

4. $-5-i$

5. $(1,1), (2,-3)$

6. $(-5,3)$

7. $(-1+i, 0, 1)/\sqrt{3}$

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡