




---

 Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 19/06/04 — Quesiti
 

---

Nome \_\_\_\_\_ Cognome \_\_\_\_\_ Matricola \_\_\_\_\_

1. Completare  $e_1 + ie_2 + e_3, ie_1 - e_2$  a una base di  $\mathbb{C}^3$ .
  
2. Esibire oppure mostrare che non esistono sottospazi  $V, W \subset \mathbb{R}^6$  tali che  $\dim(V) = \dim(W) = 4$  e  $\dim(V \cap W) = 1$ .
  
3. Risolvere il sistema  $x + iy - z = 1, x - y + iz = 1 - 2i, ix + y + z = -1 + 2i$ .
  
4. Calcolare  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1-i \\ -2 & 0 & 1 \\ i & 1+i & 0 \end{pmatrix}$ .
  
5. Trovare una base che diagonalizzi  $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ .
  
6. Siano  $\mathcal{B} = (2e_2, e_1)$  e  $\mathcal{C} = (e_1 + e_2, e_1 + 2e_2)$ . Sia  $v \in \mathbb{R}^2$  tale che  $[v]_{\mathcal{B}} = (1, -1)$ . Trovare  $[v]_{\mathcal{C}}$ .
  
7. Esibire un vettore di  $\mathbb{C}^3$  unitario, ortogonale a  $(1 + i, 1 - i, 2)$  ed avente terza coordinata reale positiva.

---

 Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.
 

---

 1. ♥ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♦ 5. ◇ 6. ♠ 7. ♠ 8. ◇ 9. ♣ 10. ♥
 

---



1. Sia  $W$  il sottospazio affine di  $\mathbb{C}^4$  dato dalle soluzioni del seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} -iz_1 - z_2 - (1+i)z_3 = 1 \\ z_1 + (1-i)z_2 + 2z_3 - z_4 = -1 \\ (1+i)z_1 + z_2 + (1+i)z_3 - iz_4 = 0. \end{cases}$$

Per ogni  $s \in \mathbb{C}$  sia poi  $r_s = {}^t(1, 0, s, 0) + \lambda \cdot {}^t(2si, 1 + s, 0, 2) : \lambda \in \mathbb{C}$ . Si consideri inoltre fissato su  $\mathbb{C}^4$  il prodotto hermitiano standard.

- (A) (2 punti) Si calcoli la dimensione di  $W$  e se ne determinino equazioni parametriche.
- (B) (2 punti) Si determini l'unico valore complesso  $s_0$  per cui  $r_{s_0}$  sia parallelo a  $W$ .
- (C) (3 punti) Si determini l'unico valore complesso  $s_1$  per cui  $r_{s_1}$  intersechi  $W$  perpendicolarmente.
- (D) (2 punti) Si dimostri  $r_0$  è disgiunto da  $W$  e ad esso non parallelo
- (E) (3 punti) Si calcoli la dimensione dello spazio affine generato da  $W \cup r_s$  al variare di  $s$  in  $\{0, s_0, s_1\}$ .

2. Per ogni  $k \in \mathbb{R}$  si considerino la matrice  $A_k = \begin{pmatrix} 2k & -k \\ 2k-1 & 1-k \end{pmatrix}$  e l'applicazione lineare  $f_k : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  definita da  $f_k(M) = A_k \cdot M$ . Sia inoltre  $W = \{M \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : f_k(M) = kM \text{ per ogni } k \in \mathbb{R}\}$ .

- (A) (2 punti) Si determini una base di  $W$ .

Sia ora  $Z = \text{Span} \left( W \cup \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ .

- (B) (2 punti) Si dimostri che  $f_k(Z) \subset Z$  per ogni  $k \in \mathbb{R}$ .

Per ogni  $k \in \mathbb{R}$  sia ora  $g_k : Z \rightarrow Z$  definita da  $g_k(M) = f_k(M)$  per  $M \in Z$ .

- (C) (3 punti) Si scelga una base  $\mathcal{B}$  di  $Z$  e si determini  $[g_k]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ .
- (D) (1 punto) Si determinino i valori di  $k$  per cui  $g_k$  sia invertibile.
- (E) (4 punti) Si determinino i valori di  $k$  per cui  $g_k$  sia diagonalizzabile.



## Risposte esatte

5.  $\diamond$ 1. Aggiungere  $e_1$ 2.  $4 + 4 - 6 > 1$ : non esistono3.  $1, i, -1$ 4.  $-5 + i$ 5.  $(1, -1), (1, 4)$ 6.  $(-4, 3)$ 7.  $(-1 - i, 0, 1)/\sqrt{3}$ 

---

1.  $\heartsuit$  2.  $\clubsuit$  3.  $\spadesuit$  4.  $\diamond$  5.  $\diamond$  6.  $\spadesuit$  7.  $\spadesuit$  8.  $\diamond$  9.  $\clubsuit$  10.  $\heartsuit$ 

---