UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 13/9/04 — Quesiti

Nome ______________ **Cognome** ______________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Sia $X = \{x \in \mathbb{R}^4 : \; x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$. Completare $(e_1 + e_2, e_1 + e_4)$ a una base di X.

2. Calcolare $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 1+i & 1 & -i \\ 0 & 1-i & -1 \end{pmatrix}$.

3. Sia $\mathcal{B} = (e_1 - e_2, e_1 + e_3, 2e_2 + e_3)$. Calcolare $[e_1]_{\mathcal{B}}$.

4. L'insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo di due equazioni in tre incognite può essere vuoto? Un punto? Una retta? Un piano? Tutto lo spazio?

5. Trovare un vettore di $\mathbb{C}^3$ ortogonale a $(1+i, -i, 1-i)$ e avente tutte le coordinate non nulle.

6. Trovare gli autovalori della matrice $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Se $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^7$ è lineare, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$ e $V + \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^7$, che dimensione può avere V?

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 13/9/04 — Esercizî

1. Per ogni k in $\mathbb{R}$ si consideri la seguente retta affine di $\mathbb{R}^3$:

$$r_k = \left\{ \begin{pmatrix} k-3 \\ k \\ -4k \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4-k \\ 1-k \\ 1+4k \end{pmatrix} : \ s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Si definisca inoltre il seguente sottospazio affine di $\mathbb{R}^3$:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \ 3x + 5z = -26 \right\}.$$

Sia infine fissato su $\mathbb{R}^3$ il prodotto scalare standard.

(A) (3 punti) Si dimostri che r_k è parallela a V se e solo se $k = -1$.

(B) (4 punti) Si dimostri che r_k è perpendicolare a V se e solo se $k = 1$.

(C) (2 punti) Si determini il punto di intersezione tra r_1 e V.

(D) (3 punti) Si determini un punto di $\mathbb{R}^3$ che appartenga alla retta r_k per ogni $k \in \mathbb{R}$.

2. Per ogni s in $\mathbb{R}$ si considerino la matrice $B_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & s \\ -1 & s^2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e l'applicazione bilineare $b_s : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ data da $b_s(v, w) = {}^{t}v \cdot B_s \cdot w$.

(A) (3 punti) Si determini un valore reale s_0 tale che b_{s_0} sia un prodotto scalare.

(B) (3 punti) Si determini un valore reale s_1 tale che b_{s_1} sia un'applicazione bilineare simmetrica, ma non sia un prodotto scalare.

(C) (2 punti) Si determini un vettore non nullo $w_0 \in \mathbb{R}^3$ tale che $b_{s_1}(v, w_0) = 0$ per ogni $v \in \mathbb{R}^3$.

(D) (4 punti) Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ ortogonale a w_0 rispetto al prodotto scalare b_{s_0}. Si determinino equazioni parametriche per V.

Risposte esatte

5. ♢

1. Ad esempio con $e_3 + e_4$.

2. $3i$

3. $(2, -1, 1)$.

4. Può essere una retta, un piano, lo spazio.

5. Ad esempio $(1, 2i, 1)$.

6. $4, -1$.

7. Almeno 5.

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡