UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 10/07/04 — Quesiti

**Nome** ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

**1.** Trovare una base di $\mathrm{Span}(e_1 + e_2 - 2e_3, -e_1 + 2e_2 - e_3, 2e_1 - e_2 - e_3) \subset \mathbb{R}^3$.

**2.** Sia $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ con le ultime due colonne linearmente indipendenti. Sia $b \in \mathbb{R}^3$. L'insieme delle soluzioni del sistema $Ax = b$ può essere vuoto? Un punto? Una retta? Un piano? Tutto $\mathbb{R}^3$?

**3.** Sia $f : \mathbb{C}_{\leqslant 5}[x] \to \mathbb{C}^2$ tale che $e_2 \notin \mathrm{Im}(f)$. Dire che valori può assumere $\dim(\mathrm{Ker}(f))$.

**4.** Dire se la funzione $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto {}^{\mathrm{t}}x\left(\begin{smallmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 2 \end{smallmatrix}\right)y \in \mathbb{R}$ sia un prodotto scalare.

**5.** Calcolare l'angolo tra i vettori $(6, 3, -\sqrt{3})$ e $(6, 3 + 2\sqrt{3}, 6 - \sqrt{3})$.

**6.** Sia $A \in \mathcal{M}_{5\times 5}(\mathbb{R})$ avente una sottomatrice $3 \times 3$ le cui orlate hanno tutte determinante nullo. Si può concludere che $\mathrm{rank}(A) \leqslant 3$?

**7.** Siano $X, Y \subset \mathbb{C}^4$ con $\dim(X) = 2$ e $\dim(Y) = 3$. Determinare i possibili valori di $\dim(X \cap Y)$, esibendo un esempio per ciascuno.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡

# Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 10/07/04 — Esercizî

**1.** Per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ si consideri la funzione lineare $f_\lambda : \mathbb{C}_{\leqslant 2}[x] \to \mathbb{C}_{\leqslant 2}[x]$ definita da

$$f_\lambda(p(x)) = (1 + i + 2x) \cdot p(0) + (-i + (1+i)x) \cdot p'(0) + (1 + (1+i)x + \lambda x^2) \cdot p''(0).$$

(A) (2 punti) Si determini $p_1(x) \in \mathbb{C}_{\leqslant 2}[x]$ non nullo tale che $f_\lambda(p_1(x)) = 2p_1(x)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$.

(B) (2 punti) Si determini $p_2(x) \in \mathbb{C}_{\leqslant 2}[x]$ non nullo tale che $f_\lambda(p_2(x)) = 2ip_2(x)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$.

(C) (3 punti) Si provi che $\mathcal{B} = (p_1(x), p_2(x), x^2)$ è base di $\mathbb{C}_{\leqslant 2}[x]$ e si scriva $[f_\lambda]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$.

(D) (2 punti) Si calcolino il determinante e gli autovalori di $[f_\lambda]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$.

(E) (3 punti) Si determinino i valori complessi di $\lambda$ per cui $f_\lambda$ sia diagonalizzabile.

**2.** Sia $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$, dove $v_1, v_2$ e $v_3$ sono i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = {}^{t}(1, 0, -1),\ v_2 = {}^{t}(2, -1, 0),\ v_3 = {}^{t}(1, 1, 1),$$

e sia $W = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0\}$.

(A) (2 punti) Si dimostri che $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

(B) (2 punti) Si determinino equazioni parametriche per $W$.

Sia $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da $g(x) = [x +^t (0, 2, 0)]_{\mathcal{B}}$.

(C) (2 punti) Si determini un vettore $v_0 \in \mathbb{R}^3$ tale che l'applicazione $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $h(x) = g(x) - v_0$ sia lineare.

(D) (3 punti) Si dimostri che $g(W)$ è un sottospazio affine di $\mathbb{R}^3$ e se ne determinino equazioni parametriche.

(E) (3 punti) Si determinino equazioni cartesiane per $g(W)$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 10/07/04 — Quesiti

# Risposte esatte

5. $\heartsuit$

**1.** Scartare un vettore qualsiasi

**2.** Un punto se $\mathrm{rank}(A) = 3$, il vuoto o una retta se $\mathrm{rank}(A) = 2$

**3.** $0 \leqslant 6 - d \leqslant 1 \;\Rightarrow\; d \in \{5, 6\}$

**4.** No: la matrice ha determinante negativo

**5.** $\pi/4$

**6.** No. Ad esempio $I_5$ con la sottomatrice delle prime tre righe e ultime tre colonne

**7.** $d = 1$: $X = \mathrm{Span}(e_1, e_2)$, $Y = \mathrm{Span}(e_1, e_3, e_4)$
$d = 2$: $X = \mathrm{Span}(e_1, e_2)$, $Y = \mathrm{Span}(e_1, e_2, e_3)$

1. $\heartsuit$ 2. $\clubsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\diamondsuit$ 5. $\heartsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\spadesuit$ 8. $\diamondsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\heartsuit$