



 Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 10/07/04 — Quesiti

Nome _____ Cognome _____ Matricola _____

1. Trovare una base di $\text{Span}(e_1 - 2e_2 + e_3, 2e_1 - e_2 - e_3, e_1 + e_2 - 2e_3) \subset \mathbb{R}^3$.

2. Sia $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ con le prime due colonne linearmente indipendenti. Sia $b \in \mathbb{R}^3$. L'insieme delle soluzioni del sistema $Ax = b$ può essere vuoto? Un punto? Una retta? Un piano? Tutto $\mathbb{R}^3$?

3. Sia $f : \mathbb{C}_{\leq 4}[x] \rightarrow \mathbb{C}^2$ tale che $e_1 \notin \text{Im}(f)$. Dire che valori può assumere $\dim(\text{Ker}(f))$.

4. Dire se la funzione $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto {}^t x \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} y \in \mathbb{R}$ sia un prodotto scalare.

5. Calcolare l'angolo tra i vettori $(2\sqrt{3}, \sqrt{3}, -1)$ e $(2\sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}, 2\sqrt{3} - 1)$.

6. Sia $A \in \mathcal{M}_{6 \times 6}(\mathbb{R})$ avente una sottomatrice 2×2 le cui orlate hanno tutte determinante nullo. Si può concludere che $\text{rank}(A) \leq 2$?

7. Siano $V, W \subset \mathbb{C}^4$ con $\dim(V) = 2$ e $\dim(W) = 3$. Determinare i possibili valori di $\dim(V \cap W)$, esibendo un esempio per ciascuno.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

 1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♦ 5. ◇ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♦ 9. ♣ 10. ♡



1. Per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ si consideri la funzione lineare $f_\lambda : \mathbb{C}_{\leq 2}[x] \rightarrow \mathbb{C}_{\leq 2}[x]$ definita da

$$f_\lambda(p(x)) = (1 + i + 2x) \cdot p(0) + (-i + (1 + i)x) \cdot p'(0) + (1 + (1 + i)x + \lambda x^2) \cdot p''(0).$$

- (A) (2 punti) Si determini $p_1(x) \in \mathbb{C}_{\leq 2}[x]$ non nullo tale che $f_\lambda(p_1(x)) = 2p_1(x)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$.
- (B) (2 punti) Si determini $p_2(x) \in \mathbb{C}_{\leq 2}[x]$ non nullo tale che $f_\lambda(p_2(x)) = 2ip_2(x)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$.
- (C) (3 punti) Si provi che $\mathcal{B} = (p_1(x), p_2(x), x^2)$ è base di $\mathbb{C}_{\leq 2}[x]$ e si scriva $[f_\lambda]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$.
- (D) (2 punti) Si calcolino il determinante e gli autovalori di $[f_\lambda]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.
- (E) (3 punti) Si determinino i valori complessi di λ per cui f_λ sia diagonalizzabile.

2. Sia $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$, dove v_1, v_2 e v_3 sono i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = {}^t(1, 0, -1), \quad v_2 = {}^t(2, -1, 0), \quad v_3 = {}^t(1, 1, 1),$$

e sia $W = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0\}$.

- (A) (2 punti) Si dimostri che $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
- (B) (2 punti) Si determinino equazioni parametriche per W .

Sia $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da $g(x) = [x + {}^t(0, 2, 0)]_{\mathcal{B}}$.

- (C) (2 punti) Si determini un vettore $v_0 \in \mathbb{R}^3$ tale che l'applicazione $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $h(x) = g(x) - v_0$ sia lineare.
- (D) (3 punti) Si dimostri che $g(W)$ è un sottospazio affine di $\mathbb{R}^3$ e se ne determinino equazioni parametriche.
- (E) (3 punti) Si determinino equazioni cartesiane per $g(W)$.



Risposte esatte

5. $\diamond$

1. Scartare un vettore qualsiasi
2. Un punto se $\text{rank}(A) = 3$, il vuoto o una retta se $\text{rank}(A) = 2$
3. $0 \leq 5 - d \leq 1 \Rightarrow d \in \{4, 5\}$
4. No: la matrice ha determinante negativo
5. $\pi/4$
6. No. Ad esempio I_6 con la sottomatrice delle prime due righe e ultime due colonne
7. $d = 1$: $V = \text{Span}(e_1, e_2)$, $W = \text{Span}(e_1, e_3, e_4)$
 $d = 2$: $V = \text{Span}(e_1, e_2)$, $W = \text{Span}(e_1, e_2, e_3)$

1. $\heartsuit$ 2. $\clubsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\diamond$ 5. $\diamond$ 6. $\spadesuit$ 7. $\spadesuit$ 8. $\diamond$ 9. $\clubsuit$ 10. $\heartsuit$
