UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 09/02/04 — Quesiti

Nome _____ **Cognome** _____ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. $V = \{z \in \mathbb{C}^4 : \ z_1 + iz_2 - z_3 - iz_4 = 0\}$. Completare $e_1 + ie_2$ a una base di V.

2. Siano $g : W \to Z$ lineare e $F = w_0 + Y \subset W$ un sottospazio affine di W.
Allora $g(F)$ è un sottospazio affine di Z?

3. Quante soluzioni può avere un sistema omogeneo di 4 equazioni in 7 incognite?

4. Che angolo formano i vettori $\left(2, 1, \sqrt{3}\right)$ e $\left(2\sqrt{3}, \sqrt{3} - \sqrt{6}, 3 + \sqrt{2}\right)$?

5. Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 0 \\ 1-i & 3 & -i \\ 0 & i & 2 \end{pmatrix}$ e $\langle z|w\rangle_A = w^* A z$, allora $\langle \, . \, | \, . \, \rangle_A$ è un prod. scal. hermitiano su $\mathbb{C}^3$?

6. Calcolare $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 4 & 0 & -2 & -1 & 7 \end{pmatrix}$.

7. Che dimensione ha $\{x \in \mathbb{R}^4 : \ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2x_2 + x_3 + x_4 = x_1 + x_2 - 2x_4 = 0\}$?

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 09/02/04 — Esercizî

1. Per $\lambda \in \mathbb{C}$ sia $A_\lambda \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ la matrice $A_\lambda = \begin{pmatrix} i\lambda+1 & i\lambda+1 & -i\lambda \\ -i\lambda & -i\lambda & i\lambda \\ -\lambda & -\lambda+i & \lambda+1 \end{pmatrix}$ e sia $f_\lambda : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ l'applicazione lineare definita da $f_\lambda(v) = A_\lambda \cdot v$.

(A) (2 punti) Si determini l'unico valore complesso λ_0 per cui f_{λ_0} non sia invertibile.

(B) (2 punti) Si determini un vettore non nullo v_0 che appartenga a $\mathrm{Ker}(f_{\lambda_0})$.

(C) (3 punti) Si determini un vettore non nullo v_1 tale che $f_\lambda(v_1) = v_1$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$.

(D) (3 punti) Sia $\mathcal{B} = (v_0, v_1, {}^{\mathrm{t}}(0,1,1))$. Si dimostri che $\mathcal{B}$ è base di $\mathbb{C}^3$ e si scriva $[f_\lambda]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ per ogni λ.

(E) (2 punti) Si determinino i valori complessi di λ per cui f_λ sia diagonalizzabile.

2. Si consideri la quaterna di elementi di $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ data da

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

(A) (2 punti) Si dimostri che $\mathcal{B}$ è una base di $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Sia ora $T = \{Y \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \ \mathrm{tr}(Y) = 0\}$, dove tr è la funzione traccia.

(B) (2 punti) Si dimostri che da $\mathcal{B}$ si può estrarre una base di T.

Per ogni $k \in \mathbb{R}$ sia $A_k \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 9 & k \\ k & 1 \end{pmatrix}$ e sia $f_k : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ la funzione che associa ad ogni $X \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ il vettore $f_k(X) = [A_k \cdot X]_{\mathcal{B}}$.

(C) (2 punti) Si dimostri che f_k è lineare.

(D) (3 punti) Si determinino i due valori reali k_1, k_2 tali che $\dim f_{k_1}(T) = \dim f_{k_2}(T) = 2$.

(E) (3 punti) Si determinino equazioni cartesiane per $f_{k_1}(T)$ e $f_{k_2}(T)$. Si utilizzino tali equazioni per calcolare $f_{k_1}(T) \cap f_{k_2}(T)$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 09/02/04 — Quesiti

Risposte esatte

5. ♡

1. $e_1 + e_3$, $ie_3 - e_4$

2. Sì

3. Sempre infinite

4. $\pi/6$

5. Sì

6. 2

7. 2

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡