UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 09/02/04 — Quesiti

Nome ______________ **Cognome** ______________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. $V = \{z \in \mathbb{C}^4 : \; z_1 + iz_2 - z_3 + iz_4 = 0\}$. Completare $e_1 + ie_2$ a una base di V.

2. Siano $f : V \to W$ lineare e $E = v_0 + X \subset V$ un sottospazio affine di V.
Allora $f(E)$ è un sottospazio affine di W?

3. Quante soluzioni può avere un sistema non omogeneo di 4 equazioni in 7 incognite?

4. Che angolo formano i vettori $\big(2, -1, \sqrt{3}\big)$ e $\big(2\sqrt{3}, \sqrt{6} - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{2}\big)$?

5. Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 0 \\ 1-i & 3 & -2i \\ 0 & 2i & 1 \end{pmatrix}$ e $\langle z|w\rangle_A = w^* A z$, allora $\langle \,.\,|\,.\,\rangle_A$ è un prod. scal. hermitiano su $\mathbb{C}^3$?

6. Calcolare rank $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -4 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

7. Che dimensione ha $\{x \in \mathbb{R}^5 : \; x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2x_2 + x_3 - x_5 = 2x_2 - x_4 + x_5 = 0\}$?

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 09/02/04 — Esercizî

1. Per $\lambda \in \mathbb{C}$ sia $A_\lambda \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{C})$ la matrice $A_\lambda = \begin{pmatrix} i\lambda+1 & i\lambda+1 & -i\lambda \\ -i\lambda & -i\lambda & i\lambda \\ -\lambda & -\lambda+i & \lambda+1 \end{pmatrix}$ e sia $f_\lambda : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ l'applicazione lineare definita da $f_\lambda(v) = A_\lambda \cdot v$.

(A) (2 punti) Si determini l'unico valore complesso λ_0 per cui f_{λ_0} non sia invertibile.

(B) (2 punti) Si determini un vettore non nullo v_0 che appartenga a $\mathrm{Ker}(f_{\lambda_0})$.

(C) (3 punti) Si determini un vettore non nullo v_1 tale che $f_\lambda(v_1) = v_1$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$.

(D) (3 punti) Sia $\mathcal{B} = (v_0, v_1, {}^{\mathrm{t}}(0,1,1))$. Si dimostri che $\mathcal{B}$ è base di $\mathbb{C}^3$ e si scriva $[f_\lambda]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ per ogni λ.

(E) (2 punti) Si determinino i valori complessi di λ per cui f_λ sia diagonalizzabile.

2. Si consideri la quaterna di elementi di $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$ data da

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

(A) (2 punti) Si dimostri che $\mathcal{B}$ è una base di $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$.

Sia ora $T = \{Y \in \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R}) : \ \mathrm{tr}(Y) = 0\}$, dove tr è la funzione traccia.

(B) (2 punti) Si dimostri che da $\mathcal{B}$ si può estrarre una base di T.

Per ogni $k \in \mathbb{R}$ sia $A_k \in \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$ la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 9 & k \\ k & 1 \end{pmatrix}$ e sia $f_k : \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ la funzione che associa ad ogni $X \in \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$ il vettore $f_k(X) = [A_k \cdot X]_{\mathcal{B}}$.

(C) (2 punti) Si dimostri che f_k è lineare.

(D) (3 punti) Si determinino i due valori reali k_1, k_2 tali che $\dim f_{k_1}(T) = \dim f_{k_2}(T) = 2$.

(E) (3 punti) Si determinino equazioni cartesiane per $f_{k_1}(T)$ e $f_{k_2}(T)$. Si utilizzino tali equazioni per calcolare $f_{k_1}(T) \cap f_{k_2}(T)$.

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 09/02/04 — Quesiti

Risposte esatte

5. $\diamondsuit$

1. $e_1 + e_3$, $e_1 + ie_4$

2. Sì

3. Nessuna o infinite

4. $\pi/6$

5. No

6. 2

7. 2

1. $\heartsuit$ 2. $\clubsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\diamondsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\spadesuit$ 8. $\diamondsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\heartsuit$