UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 07/01/04 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Trovare una base di $\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\-4\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-4\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$.

2. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, $f(x)=\left(\begin{smallmatrix}x_1+x_2\\2x_1-x_2-x_3\end{smallmatrix}\right)$, $\mathcal{B}=(e_1+e_2,e_1+2e_2+e_3,e_3)$, $\mathcal{C}=(e_1+e_2,e_1-e_2)$, $A=[f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$. Trovare $(A)_{12}$.

3. Quante soluzioni può avere un sistema non omogeneo di 4 equazioni in 5 incognite?

4. Se $A\in\mathcal{M}_{4\times4}(\mathbb{C})$ ha rango 3, può avere esattamente 3 sottomatrici 2×2 invertibili?

5. Ortonormalizzare la base $-2e_1+e_2+e_3, e_1-e_2+3e_3, e_3$.

6. Sia $f:\mathbb{C}^4\to\mathbb{C}^3$ lineare con $f(e_1-ie_2), f(e_3-ie_4)$ linearmente indipendenti.
Che dimensione può avere $\mathrm{Ker}(f)$?

7. Trovare equazioni parametriche del piano di equazione $2x+y-3z=2$.

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡

1. Per ogni $k \in \mathbb{R}$ sia $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione data da $f_k \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_3 + 1 \\ kx_1 + x_2 + 1 \\ x_2 - x_3 + k \end{pmatrix}$ e sia r_k la retta di $\mathbb{R}^4$ data da $r_k = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3k \\ 2k-2 \end{pmatrix} \ : \ t \in \mathbb{R} \right\}$. Sia inoltre $V_k = f_k(\mathbb{R}^3)$.

(A) (2 punti) Si dimostri che V_k è un sottospazio affine di $\mathbb{R}^4$ per ogni $k \in \mathbb{R}$.

(B) (2 punti) Si provi che esiste $k_1 \in \mathbb{R}$ tale che $\dim(V_k) = 3$ per ogni $k \neq k_1$. Si trovino k_1 e $\dim(V_{k_1})$.

(C) (3 punti) Al variare di k in $\mathbb{R}$ si determinino equazioni cartesiane di V_k.

(D) (2 punti) Si determinino $k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ per cui r_{k_2} sia ortogonale a V_{k_2} e r_{k_3} sia contenuta in V_{k_3}.

(E) (3 punti) Si determinino i valori di k per cui $V_k + r_k = \mathbb{R}^4$.

2. Sia $T = \{B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C}) : \ B \text{ triangolare superiore}\}$ e sia $\mathcal{B}$ la base di T data da

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ sia $A_\lambda = \begin{pmatrix} i\lambda & \lambda - 1 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$ e sia $g_\lambda : T \to T$ l'applicazione lineare data da $g_\lambda(Z) = A_\lambda \cdot Z + Z \cdot A_\lambda$.

(A) (3 punti) Si determini $[g_\lambda]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ al variare di λ in $\mathbb{C}$.

(B) (2 punti) Si calcoli $\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Ker}(g_\lambda))$ al variare di λ in $\mathbb{C}$.

(C) (3 punti) Si dimostri che g_λ è diagonalizzabile per ogni $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\lambda_0, \lambda_1\}$, dove λ_0, λ_1 sono numeri complessi distinti. Si determinino λ_0 e λ_1.

(D) (4 punti) Per ogni $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\lambda_0, \lambda_1\}$ si trovi una base $\mathcal{B}_\lambda$ di T che consista di autovettori per g_λ.

Risposte esatte

5. ♡

1. Primo, quarto, sesto vettore.

2. 1

3. Nessuna o infinite

4. Sì

5. $(-2e_1 + e_2 + e_3)/\sqrt{6}, (e_1 - e_2 + 3e_3)/\sqrt{11}, (4e_1 + 7e_2 + e_3)/\sqrt{66}$

6. 1 o 2

7. $(1, 0, 0) + \mathrm{Span}((1, -2, 0), (0, 3, 1))$

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡