



 Matematica II (Algebra Lineare) — Scritto del 07/01/04 — Quesiti

Nome _____ Cognome _____ Matricola _____

1. Trovare una base di $\text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

2. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} = (e_1 + e_2, e_1 + 2e_2 + e_3, e_3)$, $\mathcal{C} = (e_1 + e_2, e_1 - e_2)$, $A = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$.
Trovare $(A)_{12}$.

3. Quante soluzioni può avere un sistema omogeneo di 5 equazioni in 4 incognite?

4. Se $A \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$ ha rango 3, può avere esattamente 3 sottomatrici 2×2 invertibili?

5. Ortonormalizzare la base $e_1 + e_2 - 2e_3, 3e_1 - e_2 + e_3, e_1$.

6. Sia $f : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^3$ lineare con $f(e_1 + ie_2), f(e_3 + ie_4)$ linearmente indipendenti.
Che dimensione può avere $\text{Ker}(f)$?

7. Trovare equazioni parametriche del piano di equazione $3x - 2y + z = 2$.

 Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

 1. ♥ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♦ 5. ◇ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♦ 9. ♣ 10. ♥



1. Per ogni $k \in \mathbb{R}$ sia $f_k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione data da $f_k \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_3 + 1 \\ kx_1 + x_2 + 1 \\ x_2 - x_3 + k \end{pmatrix}$ e sia r_k la retta di \mathbb{R}^4 data da $r_k = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3k \\ 2k - 2 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$. Sia inoltre $V_k = f_k(\mathbb{R}^3)$.

- (A) (2 punti) Si dimostri che V_k è un sottospazio affine di \mathbb{R}^4 per ogni $k \in \mathbb{R}$.
- (B) (2 punti) Si provi che esiste $k_1 \in \mathbb{R}$ tale che $\dim(V_k) = 3$ per ogni $k \neq k_1$. Si trovino k_1 e $\dim(V_{k_1})$.
- (C) (3 punti) Al variare di k in \mathbb{R} si determinino equazioni cartesiane di V_k .
- (D) (2 punti) Si determinino $k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ per cui r_{k_2} sia ortogonale a V_{k_2} e r_{k_3} sia contenuta in V_{k_3} .
- (E) (3 punti) Si determinino i valori di k per cui $V_k + r_k = \mathbb{R}^4$.

2. Sia $T = \{B \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{C}) : B \text{ triangolare superiore}\}$ e sia \mathcal{B} la base di T data da

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ sia $A_\lambda = \begin{pmatrix} i\lambda & \lambda - 1 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$ e sia $g_\lambda : T \rightarrow T$ l'applicazione lineare data da $g_\lambda(Z) = A_\lambda \cdot Z + Z \cdot A_\lambda$.

- (A) (3 punti) Si determini $[g_\lambda]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ al variare di λ in \mathbb{C} .
- (B) (2 punti) Si calcoli $\dim_{\mathbb{C}}(\text{Ker}(g_\lambda))$ al variare di λ in \mathbb{C} .
- (C) (3 punti) Si dimostri che g_λ è diagonalizzabile per ogni $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\lambda_0, \lambda_1\}$, dove λ_0, λ_1 sono numeri complessi distinti. Si determinino λ_0 e λ_1 .
- (D) (4 punti) Per ogni $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\lambda_0, \lambda_1\}$ si trovi una base \mathcal{B}_λ di T che consista di autovettori per g_λ .



Risposte esatte

5. \diamond

1. Primo, quarto, sesto vettore.

2. 2

3. Una o infinite

4. Sì

5. $(e_1 + e_2 - 2e_3)/\sqrt{6}, (3e_1 - e_2 + e_3)/\sqrt{11}, (e_1 + 7e_2 + 4e_3)/\sqrt{66}$

6. 1 o 2

7. $(0, -1, 0) + \text{Span}((1, 0, -3), (0, 1, 2))$

1. \heartsuit 2. \clubsuit 3. \spadesuit 4. \diamond 5. \diamond 6. \spadesuit 7. \spadesuit 8. \diamond 9. \clubsuit 10. \heartsuit
