

Matematica III — Scritto del 15/02/03

Esercizio 1. Si consideri in \mathbb{R}^3 la 2-forma ω data da

$$\omega(x, y, z) = (z^2 + 1) dx dy + z(y - x) dx dz + e^z dy dz.$$

- (A) [3 punti] Si dica se ω sia chiusa.
- (B) [2 punti] Si dica se esista una 1-forma α tale che $\omega = d\alpha$.
- (C) [3 punti] Si determinino tutte 2-forme β tale che $\omega \beta$ sia chiusa.

(D) [3 punti] Posto
$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$
, si calcoli $\left| \int_R \omega \right|$.

(E) [4 punti] Posto
$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 1, z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \right\}$$
, si calcoli $\left| \int_S \omega \right|$.

Esercizio 2. Al variare di ε in [-1,1] sia $x_{\varepsilon}:[-1,1]\to\mathbb{R}$ la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x'' + 2x' + x = \varepsilon t^2 e^{-t} \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = -1/4. \end{cases}$$

- (A) [3 punti] Si trovi x_0 .
- (B) [4 punti] Si trovi x_1 .
- (C) [3 punti] Si dimostri che x_{ε} tende puntualmente ad x_0 per $\varepsilon \to 0$. Si dica se la convergenza sia in realtà uniforme.
- (D) [5 punti] Si trovi il massimo $M(\varepsilon)$ di x_{ε} su [-1,1] ed il massimo di $M(\varepsilon)$ per ε in [-1,1].

Esercizio 3. Sia $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 1/3 < |z| < 2\}$ e sia f la funzione data da:

$$f(z) = \frac{\sin(1/z)}{z - 1}$$

- (A) [3 punti] Si dica se nel punto 0 la f abbia una singolarità eliminabile, un polo, o una singolarità essenziale.
- (B) [3 punti] Si determinino gli zeri e i poli di f su Ω , specificandone l'ordine.
- (C) [3 punti] Si calcoli

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1/4} \frac{f(z)}{z} \, \mathrm{d}z.$$

- (D) [3 punti] Si calcoli $\int_{\partial\Omega} f(z) dz$.
- (E) [3 punti] Definita la funzione meromorfa g come g(z) = f(1/z), su determinio i punti singolari di g su $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1/3\}$, specificando se sono singolarità eliminabili, poli, o singolarità essenziali.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti, una penna, ed un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.