



Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0, \\ 0 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

- (A) [3 punti] Si dimostri che f ammette ovunque derivata prima, ma non derivata seconda.
 (B) [3 punti] Si determini lo sviluppo di Taylor di f centrato in 1 ed il suo raggio di convergenza.
 (C) [3 punti] Si trovi la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

- (D) [3 punti] Sia $F = \mathcal{L}(f)$ la trasformata di Laplace di f . Si determini $F(z)$.
 (E) [3 punti] Si provi che la F può essere estesa ad una funzione (ancora denotata con F) olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, e si calcoli

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta} \frac{F'(z)}{F(z)} dz.$$

Esercizio 2. Per ogni $r > 0$ si consideri l'insieme

$$E_r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (rx)^2 + (y/r)^2 + z^2 = 1\}.$$

- (A) [4 punti] Si dimostri che E_r è una superficie e che

$$\lim_{r \rightarrow 0} \mathcal{A}(E_r) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(E_r) = +\infty,$$

dove \mathcal{A} indica l'area.

- (B) [4 punti] Si provi che $\gamma_r = \{(x, y, z) \in E_r : z = 0\}$ è una curva e si trovino due parametrizzazioni $\sigma_{\pm}^{(r)} : [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow V_{\pm}^{(r)}$ tali che $V_+^{(r)} \cup V_-^{(r)} = E_r$ e $V_+^{(r)} \cap V_-^{(r)} = \gamma_r$.
 (C) [3 punti] Scelta una orientazione per E_r , si calcoli

$$\int_{E_r} x^2 dy dz.$$

- (D) [4 punti] Con la stessa orientazione del punto precedente, si calcoli

$$\int_{E_r} y dx dz.$$

Esercizio 3.

- (A) [5 punti] Si trovi su \mathbb{C} una funzione meromorfa f del tipo $f(z) = z^\alpha \cdot (1 - z)^\beta$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, tale che

$$z^3 \cdot (f(z) - (1 - z)f'(z)) = 2 \quad \forall z.$$

- (B) [3 punti] Si trovi lo sviluppo di Laurent di f centrato in 0 e si dica dove converge.
- (C) [3 punti] Si descrivano gli insiemi di convergenza degli sviluppi di Laurent di f centrati in 1 e in i .
- (D) [4 punti] Si calcoli

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz$$

dove $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ è data da

$$\gamma(t) = \frac{1}{2} + \cos(t) + i \sin(2t).$$

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti, una penna, ed un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.
