Matematica III — Scritto del 01/02/03

Esercizio 1. Sia $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \cdot y \neq 0\}$. Per ogni $a, b > 0$ in $\mathbb{R}$ sia $E_{a,b}$ l'ellisse di semiassi a e b. Sia ω la 1-forma su Ω data da

$$\omega(x,y) = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}y + \frac{1}{y}\,\mathrm{d}x.$$

(A) [2 punti] Si dica se ω sia chiusa.

(B) [3 punti] Si dimostri che per ogni funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tale che la forma $\omega + f(x,y)\,\mathrm{d}x$ sia chiusa si ha $\lim_{y \to 0} |f(1,y)| = \infty$.

(C) [3 punti] Si dimostri che esiste una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tale che la forma $\omega + f(x,y)\,\mathrm{d}x$ sia chiusa e tale che $\lim_{x \to \infty} |f(x,1)| = \infty$.

(D) [3 punti] Si dimostri che $\displaystyle\int_{\Omega \cap E_{a,b}} \omega$ è finito per ogni a, b.

(E) [4 punti] Posto $F(a,b) = \left| \displaystyle\int_{\Omega \cap E_{a,b}} \omega \right|$, sia $A = \{(a,b) : \; E_{a,b} \text{ racchiude un'area di } \pi^2\}$. Si calcolino $\sup_A F$ e $\inf_A F$.

Esercizio 2. Al variare del parametro reale k, sia x_k la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = \sin(x+t) \\ x(0) = k \end{cases}$$

definita sul massimo intervallo possibile.

(A) [2 punti] Si dimostri che per ogni k la x_k è definita su tutto $\mathbb{R}$.

(B) [2 punti] Si dica se esistano soluzioni x_k limitate.

(C) [3 punti] Si dica se esistano soluzioni x_k polinomiali.

(D) [4 punti] Si dica se x_0 abbia asintoti, specificando se sono orizzontali, verticali od obliqui.

(E) [4 punti] Si dica se $x_{\pi/2}$ abbia massimi o minimi locali.

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \to \mathbb{C}$ l'inversione rispetto alla circonferenza di centro $-i$ e raggio $\sqrt{2}$, ossia la funzione caratterizzata dalle seguenti proprietà:

$$\begin{cases} \dfrac{f(z)+i}{z+i} \in \mathbb{R}_+ \\ \\ |f(z)+i| \cdot |z+i| = 2. \end{cases}$$

(A) [3 punti] Si scriva $f(z)$ come rapporto di polinomi nella variabile $\bar{z}$.

(B) [3 punti] Si determini l'immagine di f.

(C) [3 punti] Si determini l'immagine, tramite f, del semipiano superiore $P = \{z \in \mathbb{C} : \ \Im(z) > 0\}$.

(D) [3 punti] Sia $S = \{r\,\mathrm{e}^{i\theta} : \ r > 0,\ 0 < \theta < \pi/4\}$ e sia $w_0 = \mathrm{e}^{i\pi/8}$. Si esibisca una funzione olomorfa iniettiva $g : S \to \mathbb{C}$ tale che $g(w_0) = i$ e che l'immagine di S sia P.

(E) [3 punti] Si esibisca una funzione olomorfa iniettiva $h : S \to \mathbb{C}$ tale che $h(w_0) = 0$ e che l'immagine di S sia il disco unitario.