



Esercizio 1. Sia $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \cdot y \neq 0\}$. Per ogni $a, b > 0$ in \mathbb{R} sia $E_{a,b}$ l'ellisse di semiassi a e b . Sia ω la 1-forma su Ω data da

$$\omega(x, y) = \frac{1}{x} dy + \frac{1}{y} dx.$$

- (A) [2 punti] Si dica se ω sia chiusa.
- (B) [3 punti] Si dimostri che per ogni funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tale che la forma $\omega + f(x, y) dx$ sia chiusa si ha $\lim_{y \rightarrow 0} |f(1, y)| = \infty$.
- (C) [3 punti] Si dimostri che esiste una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tale che la forma $\omega + f(x, y) dx$ sia chiusa e tale che $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x, 1)| = \infty$.
- (D) [3 punti] Si dimostri che $\int_{\Omega \cap E_{a,b}} \omega$ è finito per ogni a, b .
- (E) [4 punti] Posto $F(a, b) = \left| \int_{\Omega \cap E_{a,b}} \omega \right|$, sia $A = \{(a, b) : E_{a,b} \text{ racchiude un'area di } \pi^2\}$. Si calcolino $\sup_A F$ e $\inf_A F$.

Esercizio 2. Al variare del parametro reale k , sia x_k la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = \sin(x + t) \\ x(0) = k \end{cases}$$

definita sul massimo intervallo possibile.

- (A) [2 punti] Si dimostri che per ogni k la x_k è definita su tutto \mathbb{R} .
- (B) [2 punti] Si dica se esistano soluzioni x_k limitate.
- (C) [3 punti] Si dica se esistano soluzioni x_k polinomiali.
- (D) [4 punti] Si dica se x_0 abbia asintoti, specificando se sono orizzontali, verticali od obliqui.
- (E) [4 punti] Si dica se $x_{\pi/2}$ abbia massimi o minimi locali.

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \rightarrow \mathbb{C}$ l'inversione rispetto alla circonferenza di centro $-i$ e raggio $\sqrt{2}$, ossia la funzione caratterizzata dalle seguenti proprietà:

$$\begin{cases} \frac{f(z) + i}{z + i} \in \mathbb{R}_+ \\ |f(z) + i| \cdot |z + i| = 2. \end{cases}$$

- (A) [3 punti] Si scriva $f(z)$ come rapporto di polinomi nella variabile \bar{z} .
- (B) [3 punti] Si determini l'immagine di f .
- (C) [3 punti] Si determini l'immagine, tramite f , del semipiano superiore $P = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$.
- (D) [3 punti] Sia $S = \{r e^{i\theta} : r > 0, 0 < \theta < \pi/4\}$ e sia $w_0 = e^{i\pi/8}$. Si esibisca una funzione olomorfa iniettiva $g : S \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $g(w_0) = i$ e che l'immagine di S sia P .
- (E) [3 punti] Si esibisca una funzione olomorfa iniettiva $h : S \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $h(w_0) = 0$ e che l'immagine di S sia il disco unitario.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti, una penna, ed un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.
