Matematica II (Geometria e Algebra) — Scritto del 21/06/03

Esercizio 1. Al variare di s in $\mathbb{R}$ si consideri la matrice $A_s \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ definita da

$$A_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s^2 & 1+s^2 & s+s^3 \\ -s & -s & -s^2 \end{pmatrix}$$

e si indichi ancora con A_s l'applicazione lineare di $\mathbb{R}^3$ in se stesso associata alla matrice.

(A) [3 punti] Si determinino, al variare di s, equazioni parametriche per $\mathrm{Ker}(A_s)$.

(B) [3 punti] Si determinino, al variare di s, equazioni cartesiane per $\mathrm{Im}(A_s)$.

(C) [2 punti] Si dimostri che $A_s(v) = v$ per ogni $s \in \mathbb{R}$ ed ogni $v \in \mathrm{Im}(A_s)$.

(D) [3 punti] Si dimostri che $\mathbb{R}^3$ si decompone nella somma diretta di $\mathrm{Ker}(A_s)$ e $\mathrm{Im}(A_s)$ per ogni $s \in \mathbb{R}$.

(E) [2 punti] Per ogni $s \in \mathbb{R}$, si esibisca una base di autovettori per A_s.

(F) [2 punti] Si determinino i valori di s per cui $\mathrm{Ker}(A_s) \perp \mathrm{Im}(A_s)$.

Esercizio 2. Siano V_1 e V_2 i sottospazî affini di $\mathbb{C}^3$ definiti come segue:

$$V_1 = \{z \in \mathbb{C}^3 : z_1 - iz_2 + z_3 = 2, (1+i)z_1 + (1-i)z_2 + (1+i)z_3 = 2+2i\},$$

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ -i \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \right\}.$$

Sia inoltre $r = V_1 \cap V_2$.

(A) [2 punti] Si calcoli la dimensione di V_1 e se ne determinino equazioni parametriche.

(B) [3 punti] Si calcoli la dimensione di V_2 e se ne determinino equazioni cartesiane.

(C) [4 punti] Si calcoli la dimensione di r e se ne determinino equazioni parametriche.

(D) [3 punti] Sia H l'unico piano vettoriale di $\mathbb{C}^3$ ortogonale a r (rispetto al prodotto hermitiano standard di $\mathbb{C}^3$) e sia P il punto di intersezione tra H e r. Si calcolino le coordinate di P.

(E) [3 punti] Si dimostri che P è il punto di r di minima distanza dall'origine (rispetto al prodotto hermitiano standard di $\mathbb{C}^3$).

Esercizio 3. Per ogni $k \in \mathbb{R}$ sia $f_k : \mathbb{R}_{\leqslant 2}[x] \to \mathbb{R}_{\leqslant 2}[x]$ l'applicazione lineare definita da

$$f_k(p(x)) = k \cdot (p(0) + 2p'(0)) \cdot (x-1) + (1/2) \cdot p''(0) \cdot (k^2x^2 + x - 1).$$

Sia inoltre $\mathcal{C} = \{1, x, x^2\}$ la base canonica di $\mathbb{R}_{\leqslant 2}[x]$.

(A) [4 punti] Si scriva la matrice $[f_k]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$ al variare di k in $\mathbb{R}$.

(B) [3 punti] Si determini un polinomio $p_0(x) \in \mathbb{R}_{\leqslant 2}[x]$ non nullo e tale che $f_k(p_0(x)) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{R}$.

(C) [3 punti] Si determini un polinomio $p_1(x) \in \mathbb{R}_{\leqslant 2}[x]$ non nullo e tale che $f_k(p_1(x)) = k \cdot p_1(x)$ per ogni $k \in \mathbb{R}$.

(D) [5 punti] Si determinino i valori di k per cui f_k sia diagonalizzabile.