Matematica II (Geometria e Algebra) — Scritto del 15/02/03

Esercizio 1. Al variare di k in $\mathbb{R}$ sia $A_k = \begin{pmatrix} k-2 & 0 & 1 & k-2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & k \\ 0 & k-1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ e si indichi ancora con $A_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione data da $A_k(x) = A_k \cdot x$.

(A) [4 punti] Si dimostri che A_k è sempre invertibile eccetto che per due valori k_0 e k_1 con $k_0 < k_1$ e si determinino k_0 e k_1.

(B) [3 punti] Si calcolino il rango di A_{k_0} e di A_{k_1}.

(C) [3 punti] Si trovino equazioni parametriche per $\mathrm{Ker}(A_{k_0})$ e per $\mathrm{Ker}(A_{k_1})$.

(D) [3 punti] Si dimostri che $\mathrm{Ker}(A_{k_1}) \perp \mathrm{Im}(A_{k_1})$ rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$.

(E) [2 punti] Si trovino equazioni cartesiane per $\mathrm{Im}(A_{k_1})$.

Esercizio 2. Al variare di $k \in \mathbb{C}$ sia $f_k : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ l'applicazione lineare data da

$$f_k \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2-ik)z_1 + kz_2 - kz_3 \\ (i+k)z_1 + (1+ik)z_2 - (1+ik)z_3 \\ iz_1 - z_2 + z_3 \end{pmatrix}.$$

(A) [3 punti] Si determini un vettore non nullo $v_0 \in \mathbb{C}^3$ tale che $f_k(v_0) = 0$ per ogni k in $\mathbb{C}$.

(B) [3 punti] Si determini un vettore non nullo $v_1 \in \mathbb{C}^3$ tale che $f_k(v_1) = 2v_1$ per ogni k in $\mathbb{C}$.

(C) [5 punti] Si determini una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{C}^3$ tale che $[f_k]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 2k & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ per ogni k in $\mathbb{C}$.

(D) [4 punti] Si discuta la diagonalizzabilità di f_k al variare di k in $\mathbb{C}$.

Esercizio 3. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}_{\leqslant 3}[x] \to \mathbb{R}^3$ data da $f(p(x)) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{pmatrix}$ e al variare di t in $\mathbb{R}$ sia $W_t = \{p(x) \in \mathbb{R}_{\leqslant 3}[x] : \; tp'(0) + p''(0) = 0\}$.

(A) [3 punti] Si calcoli la dimensione di $\mathrm{Ker}(f)$ e se ne trovino equazioni parametriche.

(B) [4 punti] Si determini l'unico valore t_0 per cui $f(W_{t_0}) \neq \mathbb{R}^3$ e si trovino equazioni parametriche per W_{t_0}.

(C) [3 punti] Si trovino equazioni cartesiane per $f(W_{t_0})$.

(D) [2 punti] Si dimostri che per ogni t diverso da t_0 esiste un'unica applicazione lineare $g_t : \mathbb{R}^3 \to W_t$ tale che $f(g_t(v)) = v$ per ogni $v \in \mathbb{R}^3$.

(E) [3 punti] Per ogni $t \neq t_0$ si calcoli $g_t \begin{pmatrix} t \\ 2 \\ 4 - 3t \end{pmatrix}$.