

## Matematica II (Geometria e Algebra) — Scritto del 15/02/03

Esercizio 1. Al variare di 
$$k$$
 in  $\mathbb{R}$  sia  $A_k = \begin{pmatrix} k-2 & 0 & 1 & k-2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & k \\ 0 & k-1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  e si indichi ancora con  $A_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$  l'applicazione data da  $A_k(x) = A_k : x$ .

 $A_k: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$  l'applicazione data da  $A_k(x) = A_k \cdot x$ .

- (A) [4 punti] Si dimostri che  $A_k$  è sempre invertibile eccetto che per due valori  $k_0$  e  $k_1$  con  $k_0 < k_1$  e si determinino  $k_0$  e  $k_1$ .
- (B) [3 punti] Si calcolino il rango di  $A_{k_0}$  e di  $A_{k_1}$ .
- (C) [3 punti] Si trovino equazioni parametriche per  $Ker(A_{k_0})$  e per  $Ker(A_{k_1})$ .
- (D) [3 punti] Si dimostri che  $\operatorname{Ker}(A_{k_1}) \perp \operatorname{Im}(A_{k_1})$  rispetto al prodotto scalare standard di  $\mathbb{R}^4$ .
- (E) [2 punti] Si trovino equazioni cartesiane per  $\operatorname{Im}(A_{k_1})$ .

Esercizio 2. Al variare di  $k \in \mathbb{C}$  sia  $f_k : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$  l'applicazione lineare data da

$$f_k \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2-ik)z_1 + kz_2 - kz_3 \\ (i+k)z_1 + (1+ik)z_2 - (1+ik)z_3 \\ iz_1 - z_2 + z_3 \end{pmatrix}.$$

- (A) [3 punti] Si determini un vettore non nullo  $v_0 \in \mathbb{C}^3$  tale che  $f_k(v_0) = 0$  per ogni k in  $\mathbb{C}$ .
- (B) [3 punti] Si determini un vettore non nullo  $v_1 \in \mathbb{C}^3$  tale che  $f_k(v_1) = 2v_1$  per ogni k in  $\mathbb{C}$ .
- (C) [5 punti] Si determini una base  $\mathcal{B}$  di  $\mathbb{C}^3$  tale che  $[f_k]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 2k & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  per ogni k in  $\mathbb{C}$ .
- (D) [4 punti] Si discuta la diagonalizzabilità di  $f_k$  al variare di k in  $\mathbb{C}$ .

Esercizio 3. Si consideri l'applicazione lineare  $f: \mathbb{R}_{\leqslant 3}[x] \to \mathbb{R}^3$  data da  $f(p(x)) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{pmatrix}$  e al variare di t in  $\mathbb{R}$  sia  $W_t = \{p(x) \in \mathbb{R}_{\leqslant 3}[x]: tp'(0) + p''(0) = 0\}.$ 

- (A) [3 punti] Si calcoli la dimensione di Ker(f) e se ne trovino equazioni parametriche.
- (B) [4 punti] Si determini l'unico valore  $t_0$  per cui  $f(W_{t_0}) \neq \mathbb{R}^3$  e si trovino equazioni parametriche per  $W_{t_0}$ .
- (C) [3 punti] Si trovino equazioni cartesiane per  $f(W_{t_0})$ .
- (D) [2 punti] Si dimostri che per ogni t diverso da  $t_0$  esiste un'unica applicazione lineare  $g_t : \mathbb{R}^3 \to W_t$  tale che  $f(g_t(v)) = v$  per ogni  $v \in \mathbb{R}^3$ .
- (E) [3 punti] Per ogni  $t \neq t_0$  si calcoli  $g_t \begin{pmatrix} t \\ 2 \\ 4-3t \end{pmatrix}$ .

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti, una penna, ed un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.