Matematica II (Geometria e Algebra) — Scritto del 13/09/03

Esercizio 1. Si consideri la matrice a coefficienti reali $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ e sia $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'applicazione bilineare definita da $g(v, w) = {}^t v \cdot A \cdot w$ per ogni $v, w \in \mathbb{R}^3$. Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di equazioni $x + 6y + 2z = 2x - 2y - 3z = 0$. Al variare di s in $\mathbb{R}$ sia inoltre V_s il sottospazio di equazioni $(s - 1)x + y - z = y + sz = 0$.

(A) [4 punti] Si dimostri che g definisce un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$.

(B) [2 punti] Si determinino equazioni parametriche per V_s e per W.

(C) [2 punti] Si determini l'unico valore reale s_0 per cui V_{s_0} sia ortogonale a W rispetto al prodotto scalare g.

(D) [4 punti] Si determini una base di $\mathbb{R}^3$ che sia ortonormale rispetto a g.

(E) [3 punti] Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^3$. Si determinino due vettori w_1, w_2 tali che $\langle w_1, w_1 \rangle > g(w_1, w_1)$ e $\langle w_2, w_2 \rangle < g(w_2, w_2)$.

Esercizio 2. Al variare di λ in $\mathbb{C}$ si consideri l'applicazione lineare $f_\lambda : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ definita da

$$f_\lambda \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iz_1 + z_3 \\ \lambda z_2 - 2z_3 \\ -\lambda z_1 + 2z_2 - i\lambda z_3 \end{pmatrix}.$$

(A) [4 punti] Si determinino i due valori complessi λ_0 e λ_1 per cui f_λ sia non invertibile.

(B) [2 punti] Si determinino equazioni parametriche per $\mathrm{Ker}(f_{\lambda_0})$ e per $\mathrm{Ker}(f_{\lambda_1})$.

(C) [2 punti] Si determinino equazioni cartesiane per $\mathrm{Im}(f_{\lambda_0})$ e per $\mathrm{Im}(f_{\lambda_1})$.

Sia ora fissato su $\mathbb{C}^3$ il prodotto hermitiano standard.

(D) [3 punti] Sia H il sottospazio di $\mathbb{C}^3$ ortogonale a $\mathrm{Ker}(f_{\lambda_0}) + \mathrm{Ker}(f_{\lambda_1})$. Si determinino equazioni parametriche per H.

(E) [4 punti] Si dimostri che esiste un'isometria g di $\mathbb{C}^3$ tale che $g(\mathrm{Ker}(f_{\lambda_0})) = H$ e $g(\mathrm{Ker}(f_{\lambda_1})) = \mathrm{Ker}(f_{\lambda_1})$.

Esercizio 3. Al variare di k in $\mathbb{R}$ si consideri l'applicazione lineare $f_k : \mathbb{R}_{\leqslant 2}[t] \to \mathbb{R}_{\leqslant 2}[t]$ data da

$$f_k(p(t)) = p(0) \cdot (2+t) + p'(0) \cdot (3 + (3k+4)t + (6k+2)t^2) + p(1) \cdot (-1 - (k+1)t - 2kt^2)$$

per ogni $p(t) \in \mathbb{R}_{\leqslant 2}[t]$.

(A) [4 punti] Sia $\mathcal{C} = (1, t, t^2)$ la base canonica di $\mathbb{R}_{\leqslant 2}[t]$. Si determini la matrice $[f_k]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}$ al variare di k in $\mathbb{R}$.

(B) [2 punti] Si determini un polinomio $p_1(t) \neq 0$ tale che $f_k(p_1(t)) = p_1(t)$ per ogni $k \in \mathbb{R}$.

(C) [2 punti] Si determini un polinomio $p_2(t) \neq 0$ tale che $f_k(p_2(t)) = 2p_2(t)$ per ogni $k \in \mathbb{R}$

(D) [3 punti] Sia $\mathcal{B} = (1, p_1(t), p_2(t))$. Si determini la matrice $[f_k]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ al variare di k in $\mathbb{R}$.

(E) [4 punti] Si determinino i valori reali di k per cui f_k sia diagonalizzabile.