



Esercizio 1. Si consideri la matrice a coefficienti reali $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ e sia $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

l'applicazione bilineare definita da $g(v, w) = {}^t v \cdot A \cdot w$ per ogni $v, w \in \mathbb{R}^3$. Sia W il sottospazio di \mathbb{R}^3 di equazioni $x + 6y + 2z = 2x - 2y - 3z = 0$. Al variare di s in \mathbb{R} sia inoltre V_s il sottospazio di equazioni $(s - 1)x + y - z = y + sz = 0$.

- (A) [4 punti] Si dimostri che g definisce un prodotto scalare su \mathbb{R}^3 .
- (B) [2 punti] Si determinino equazioni parametriche per V_s e per W .
- (C) [2 punti] Si determini l'unico valore reale s_0 per cui V_{s_0} sia ortogonale a W rispetto al prodotto scalare g .
- (D) [4 punti] Si determini una base di \mathbb{R}^3 che sia ortonormale rispetto a g .
- (E) [3 punti] Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su \mathbb{R}^3 . Si determinino due vettori w_1, w_2 tali che $\langle w_1, w_1 \rangle > g(w_1, w_1)$ e $\langle w_2, w_2 \rangle < g(w_2, w_2)$.

Esercizio 2. Al variare di λ in \mathbb{C} si consideri l'applicazione lineare $f_\lambda : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ definita da

$$f_\lambda \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iz_1 + z_3 \\ \lambda z_2 - 2z_3 \\ -\lambda z_1 + 2z_2 - i\lambda z_3 \end{pmatrix}.$$

- (A) [4 punti] Si determinino i due valori complessi λ_0 e λ_1 per cui f_λ sia non invertibile.
- (B) [2 punti] Si determinino equazioni parametriche per $\text{Ker}(f_{\lambda_0})$ e per $\text{Ker}(f_{\lambda_1})$.
- (C) [2 punti] Si determinino equazioni cartesiane per $\text{Im}(f_{\lambda_0})$ e per $\text{Im}(f_{\lambda_1})$.

Sia ora fissato su \mathbb{C}^3 il prodotto hermitiano standard.

- (D) [3 punti] Sia H il sottospazio di \mathbb{C}^3 ortogonale a $\text{Ker}(f_{\lambda_0}) + \text{Ker}(f_{\lambda_1})$. Si determinino equazioni parametriche per H .
- (E) [4 punti] Si dimostri che esiste un'isometria g di \mathbb{C}^3 tale che $g(\text{Ker}(f_{\lambda_0})) = H$ e $g(\text{Ker}(f_{\lambda_1})) = \text{Ker}(f_{\lambda_1})$.

Esercizio 3. Al variare di k in \mathbb{R} si consideri l'applicazione lineare $f_k : \mathbb{R}_{\leq 2}[t] \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 2}[t]$ data da

$$f_k(p(t)) = p(0) \cdot (2 + t) + p'(0) \cdot (3 + (3k + 4)t + (6k + 2)t^2) + p(1) \cdot (-1 - (k + 1)t - 2kt^2)$$

per ogni $p(t) \in \mathbb{R}_{\leq 2}[t]$.

- (A) [4 punti] Sia $\mathcal{C} = (1, t, t^2)$ la base canonica di $\mathbb{R}_{\leq 2}[t]$. Si determini la matrice $[f_k]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$ al variare di k in \mathbb{R} .
- (B) [2 punti] Si determini un polinomio $p_1(t) \neq 0$ tale che $f_k(p_1(t)) = p_1(t)$ per ogni $k \in \mathbb{R}$.
- (C) [2 punti] Si determini un polinomio $p_2(t) \neq 0$ tale che $f_k(p_2(t)) = 2p_2(t)$ per ogni $k \in \mathbb{R}$.
- (D) [3 punti] Sia $\mathcal{B} = (1, p_1(t), p_2(t))$. Si determini la matrice $[f_k]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ al variare di k in \mathbb{R} .
- (E) [4 punti] Si determinino i valori reali di k per cui f_k sia diagonalizzabile.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti, una penna, ed un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.
