UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica II (Geometria e Algebra) — Scritto del 12/07/03

Esercizio 1. Per ogni $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ sia $f_A : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ l'applicazione lineare definita da $f_A(B) = A \cdot B$ per ogni $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

(A) [3 punti] Si dimostri che $f_A(B) = 0$ se e solo se $\mathrm{Im}(B) \subset \mathrm{Ker}(A)$.

(B) [4 punti] Si calcoli la dimensione di $\mathrm{Ker}(f_A)$ in funzione della dimensione di $\mathrm{Ker}(A)$, e si deduca che f_A è invertibile se e solo se A lo è.

(C) [3 punti] Sia $\mathcal{C}$ la base canonica di $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Si dimostri che se A è una matrice diagonale, allora anche $[f_A]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$ è una matrice diagonale.

(D) [5 punti] Si dimostri che se A è diagonalizzabile, allora f_A è un'applicazione diagonalizzabile.

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^3$, siano V e r i sottospazî affini definiti da

$$\begin{aligned} V &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},\ t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}, \\ r &= \{x \in \mathbb{R}^3 :\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, x_1 + x_3 = 2\}. \end{aligned}$$

(A) [2 punti] Si determinino equazioni cartesiane per V.

(B) [2 punti] Si determinino equazioni parametriche per r.

(C) [2 punti] Si dimostri che r e V sono paralleli.

(D) [4 punti] Sia s l'unica retta ortogonale a V passante per l'origine e sia W l'unico piano parallelo a V che contenga r. Si calcolino le coordinate dei punti $P_1 = W \cap s$ e $P_2 = V \cap s$.

(E) [5 punti] Si dimostri che esiste un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(W) = V$ e $f(s) = s$, si scelga una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$, e si scriva la matrice $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

Esercizio 3. Per ogni $k \in \mathbb{R}$, sia $g_k : \mathbb{R}_{\leqslant 2}[x] \times \mathbb{R}_{\leqslant 2}[x] \to \mathbb{R}$ l'applicazione definita da

$$g_k(p(x), q(x)) = p(0) \cdot q(0) + p(k) \cdot q(k).$$

(A) [2 punti] Si dimostri che per ogni $k \in \mathbb{R}$ l'applicazione g_k è bilineare e simmetrica, e che per ogni $p(x) \in \mathbb{R}_{\leqslant 2}[x]$ si ha inoltre $g_k(p(x), p(x)) \geqslant 0$.

Per ogni $k \in \mathbb{R}$ sia $V_k = \{p(x) \in \mathbb{R}_{\leqslant 2}[x] : \ g_k(p(x), p(x)) = 0\}$.

(B) [4 punti] Si dimostri che V_k è un sottospazio vettoriale e se ne calcoli la dimensione al variare di k in $\mathbb{R}$.

(C) [3 punti] Si determinino equazioni parametriche per V_k al variare di k in $\mathbb{R}$.

(D) [2 punti] Si dimostri che $V_k = V_h$ se e solo se $h = k$.

(E) [4 punti] Si dimostri che se h e k sono numeri reali distinti ed entrambi diversi da 0, allora l'applicazione bilineare e simmetrica $g_{h,k} : \mathbb{R}_{\leqslant 2}[x] \times \mathbb{R}_{\leqslant 2}[x] \to \mathbb{R}$ data da

$$g_{h,k}(p(x), q(x)) = g_h(p(x), q(x)) + g_k(p(x), q(x))$$

definisce un prodotto scalare su $\mathbb{R}_{\leqslant 2}[x]$.